Bac Blanc Spécialité Mathématiques

Terminales

Mercredi 14 février 2024

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. Le barème prend en compte la rigueur de la rédaction et la précision des justifications.

Exercice 1 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On rappelle que la formule de la distance

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

On considère :

- le point $\text{A}(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$;
- le plan $\mathcal{P}_1$, d'équation : $5x + 2y + 4z - 17 = 0$;
- le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation : $10x + 14y + 3z - 19 = 0$;
- la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 + 2t \\ y & = & -t \\ z & = & 3 - 2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

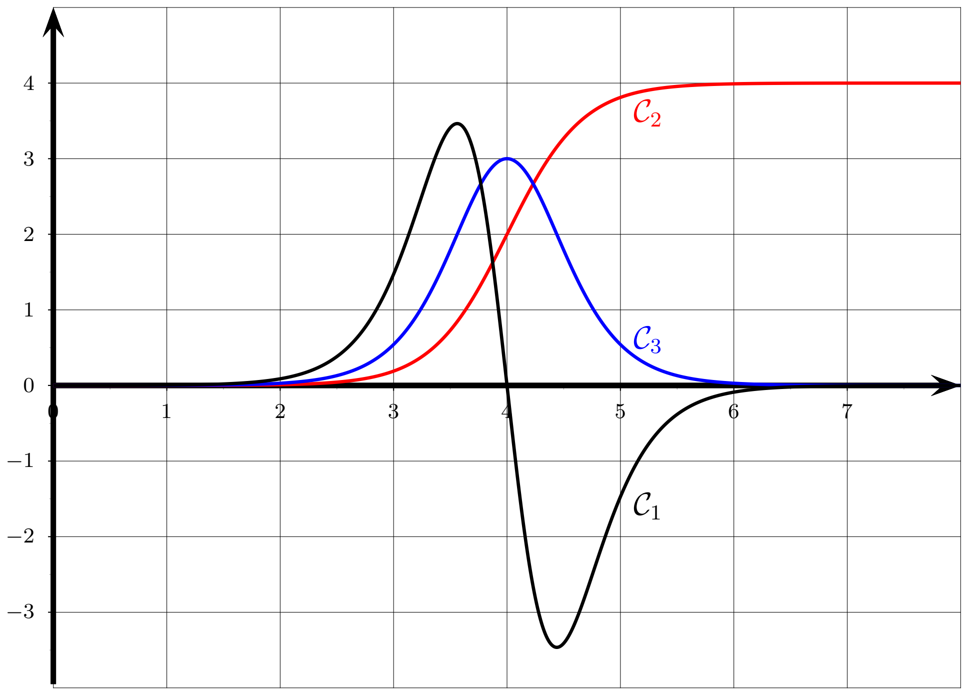
1. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
3. (a) Vérifier que A n'appartient pas à $\mathcal{P}_1$.
   (b) Justifier que A n'appartient pas à $\mathcal{D}$.
4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(1 + 2t\ ;\ -t\ ;\ 3 - 2t)$.
   On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe $\text{A}M^2$, soit $f(t) = \text{A}M^2$.
   (a) Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.
   (b) Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3\ ;\ -1\ ;\ 1)$.
5. On note H le point de coordonnées $(3\ ;\ -1\ ;\ 1)$.
   Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

Exercice 2 **5 points**

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal.
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 4.
3. Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$.

Partie B

Soit un réel k strictement positif.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4}{1 + \mathrm{e}^{-kx}}.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$,
2. Prouver que $g'(0) = k$.
3. En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

▷ Calcul formel	
1	g(x) =4/(1 + e^(-kx)) $\to g(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{-kx} + 1}$
2	Simplifier$(g''(x))$ $\to g''(x) = -4\mathrm{e}^{kx}\left(\mathrm{e}^{kx} - 1\right)\dfrac{k^2}{\left(\mathrm{e}^{kx} + 1\right)^3}$

Exercice 3 **5 points**

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n.$$
3. Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante.
4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice. (Pour cette question, l'utilisation de la calculatrice suffit, l'utilisation du logarithme pourra donner un bonus)

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0{,}19\times(n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.
2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8{,}5$. (Pour cette question, l'utilisation de la calculatrice suffit, l'utilisation du logarithme pourra donner un bonus)

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.

   Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?

   Justifier votre réponse.
2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

Exercice 4 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.

On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.
Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\dfrac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\dfrac{7}{10}$;
- la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\dfrac{12}{25}$.

On considère les évènements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A » ;
- B : « Le joueur choisit le monde B » ;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

1. La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

   a. $\dfrac{7}{10}$ **b.** $\dfrac{3}{25}$ **c.** $\dfrac{7}{25}$ **d.** $\dfrac{24}{125}$

2. La probabilité $P_B(G)$ de l'événement G sachant que B est réalisé est égale à :

   a. $\dfrac{1}{5}$ **b.** $\dfrac{1}{3}$ **c.** $\dfrac{7}{15}$ **d.** $\dfrac{5}{12}$

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives.
On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise.
On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\dfrac{12}{25}$.

3. La probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à :

   a. 0,859 **b.** 0,671 **c.** 0,188 **d.** 0,187

4. On considère un entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne au plus n parties est de 0,207. Alors :

   a. $n = 2$ **b.** $n = 3$ **c.** $n = 4$ **d.** $n = 5$

5. La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale à :

   a. $1 - \left(\dfrac{12}{25}\right)^{10}$ **b.** $\left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$ **c.** $\left(\dfrac{12}{25}\right)^{10}$ **d.** $1 - \left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$