Bac Blanc de Spécialité Maths

TMATH1

Jeudi 25 janvier

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. Le barème prend en compte la rigueur de la rédaction et la précision des justifications.

Exercice 1 **4 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points

$$\mathrm{A}(-1\ ;\ -3\ ;\ 2),\qquad \mathrm{B}(3\ ;\ -2\ ;\ 6)\quad \text{et}\quad \mathrm{C}(1\ ;\ 2\ ;\ -4).$$

On rappelle qu'un vecteur est normal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.
2. (a) On considère $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$. Calculer $\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}$

   (b) En déduire que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

   (c) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $13x - 16y - 9z - 17 = 0$.

   On note $\mathcal{D}$ la droite passant par le point F$(15\ ;\ -16\ ;\ -8)$ et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
4. On appelle E le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$.
   Déterminer les coordonnées de E.

Exercice 2 **6 points**

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

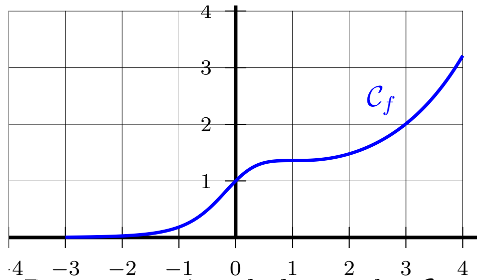
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

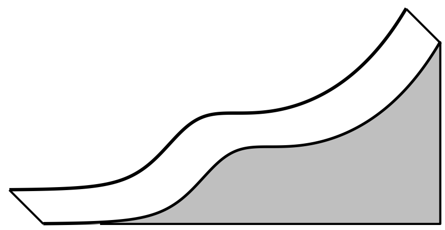
1. (a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

   (b) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathcal{C}_f$


Vue de profil du toboggan

   (a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

   (b) On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

   où p est la fonction définie dans la partie A.

   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Exercice 3 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-3}.$$

   La fonction f est la dérivée de $F(x)$ sur $\mathbb{R}$ est définie par :

   a. $F(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2-3}$ **b.** $F(x) = \left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-3}$

   c. $F(x) = \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{x^2-3}$ **d.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-3}$

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1}.$$

La suite (u_n) est :

a. arithmétique de raison 2 ;
b. géométrique de raison e ;
c. géométrique de raison e^2 ;
d. convergente vers e.

3. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-t}}$ où a et b sont deux nombres réels.
On sait que $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 3$.
Les valeurs de a et b sont :

a. $a = 2$ et $b = 3$
b. $a = 4$ et $b = \dfrac{4}{3}$
c. $a = 4$ et $b = 1$
d. $a = 6$ et $b = 2$

4. Alice dispose de deux urnes A et B contenant chacune quatre boules indiscernables au toucher.
L'urne A contient deux boules vertes et deux boules rouges.
L'urne B contient trois boules vertes et une boule rouge.
Alice choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Elle obtient une boule verte.
La probabilité qu'elle ait choisi l'urne B est :

a. $\dfrac{3}{8}$
b. $\dfrac{1}{2}$
c. $\dfrac{3}{5}$
d. $\dfrac{5}{8}$

5. On pose $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{100}$.
Parmi les scripts Python ci-dessous, celui qui permet de calculer la somme S est :

a.
```
def somme_a() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S=1/(k+1)
    return S
```
b.
```
def somme_b() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```
c.
```
def somme_c() :
    k = 0
    while S < 100 :
        S = S+1/(k+1)
    return S
```
d.
```
def somme_d() :
    k = 0
    while k < 100 :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

Exercice 4 — 5 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

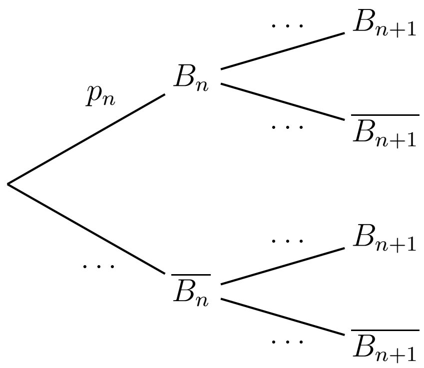
Partie A

On estime que :

— lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9 ;
— lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est 0,4.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel.
On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0{,}85$.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4$.
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0{,}8$.
   (b) À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?
5. (a) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0{,}8$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   (b) En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.
   (c) En déduire la limite de la suite (p_n).

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :
— l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
— la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à 0,8.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat.