# Bac Blanc de Spécialité Maths

TMATH2

Mardi 23 Féverier

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. Le barème prend en compte la rigueur de la rédaction et la précision des justifications.

**Exercice 1** **5 points**

*Les parties* A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

**Partie A**

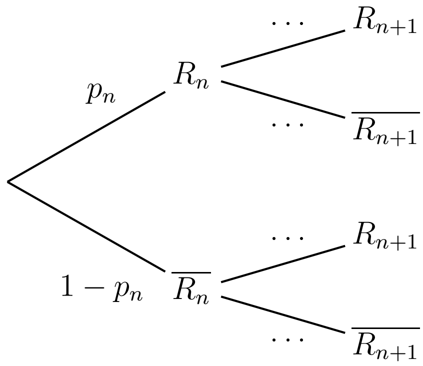
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus Je lendemain.

On note pour tout entier naturel $n$ :

- $R_n$ l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la $n$-ième séance »,
- $p_n$ la probabilité de l'évènement $R_n$. On considère que $p_0 = 0{,}6$.

1. Soit $n$ un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.




2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}3.$$

3. On considère la suite $(u_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $u_n = p_n - 0{,}75$.

   (a) Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) Démontrer que, pour tout entier $n$ naturel $n$ :

   $$p_n = 0{,}75 - 0{,}15 \times 0{,}6^n.$$

   (c) En déduire la limite de $p_n$, notée $\ell$.

(d) Interpréter la valeur de $\ell$ dans le cadre de l'exercice.

**Partie B**

Apres de nombreuses séances d'entraînement, l'entraineur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.
On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies,

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par $X$.
2. Déterminer, à $10^{-3}$ près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
3. Calculer $p(X \geqslant 9)$, à $10^{-3}$ près.

**EXERCICE 2** **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormée $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère :

- $d_1$ la droite passant par le point H(2 ; 3 ; 0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ;
- $d_2$ la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2k-3 \\ y & = & k \\ z & = & 5 \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{R}$$

On rappelle que deux droites sont perpendiculaires si leur vecteur directeur sont orthogonaux et si les droites sont sécantes.

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite $\Delta$ qui soit perpendiculaire aux droites $d_1$ et $d_2$.

1. (a) Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de la droite $d_2$.
   (b) Démontrer que les droites $d_1$ et $d_2$ ne sont pas parallèles.
   (c) Donner une représentation paramétrique de $d_1$
   (d) Démontrer que les droites $d_1$ et $d_2$ ne sont pas sécantes.
   (e) Que peut-on en déduire pour les droites $d_1$ et $d_2$ ?
2. (a) Soit le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$. Calculer $\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v}$
   (b) En déduire que $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.
   (c) On considère le plan $P$ passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.
   On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :

$$5x + 4y - z - 22 = 0.$$

   Démontrer que l'intersection du plan $P$ et de la droite $d_2$ est le point M(3 ; 3 ; 5).

3. Soit $\Delta$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ passant par le point M.
   Une représentation paramétrique de $\Delta$ est donc donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -r+3 \\ y & = & 2r+3 \\ z & = & 3r+5 \end{array}\right. \qquad r \in \mathbb{R}.$$

   (a) Déterminer les coordonnées du point L, intersection de $\Delta$ et $d_1$.
   (b) Expliquer pourquoi la droite $\Delta$ est solution du problème posé.

**Exercice 3** **5 points**

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que $f$ est deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On note $f'$ sa dérivée et $f''$ sa dérivée seconde.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$ et en déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.
2. Démontrer que pour tout réel $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ :

$$f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

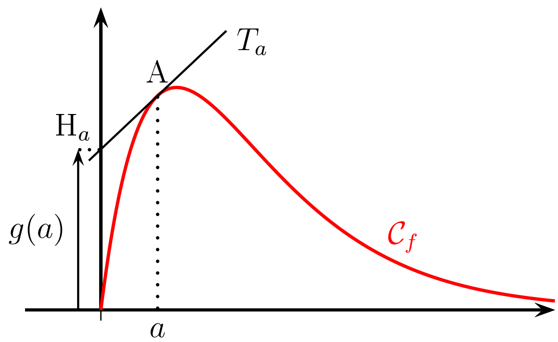
3. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ , sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
4. Déterminer, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \frac{367}{1\,000}.$$

5. On admet que pour tout $x$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ :

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2).$$

   Étudier la convexité de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
6. Soit $a$ un réel appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ et A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a$.
   On note $T_a$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.
   On note $\mathrm{H}_a$ le point d'intersection de la droite $T_a$ et de l'axe des ordonnées.
   On note $g(a)$ l'ordonnée de $\mathrm{H}_a$.
   La situation est représentée sur la figure ci-contre.




   (a) Démontrer qu'une équation réduite de la tangente $T_a$ est :

$$y = \left[(1-a)\mathrm{e}^{-a}\right]x + a^2\mathrm{e}^{-a}.$$

(b) En déduire l'expression de $g(a)$.

(c) Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
*Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

## Exercice 4 QCM — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

**Question 1 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
La fonction $f$ est la dérivée de la fonction $F$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

**A.** $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$

**B** $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$

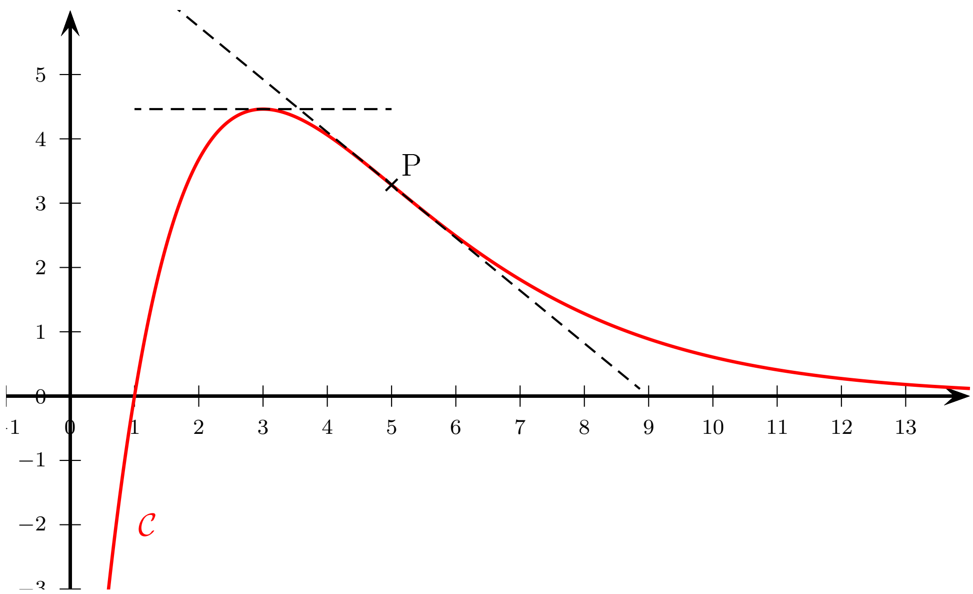
**C.** $F(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$

**D.** $F(x) = \dfrac{2}{x}\mathrm{e}^{x^2}$.

**Question 2 :**

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction $f$ définie et deux fois dérivable sur $]0~;~+\infty[$. On sait que :

- le maximum de la fonction $f$ est atteint au point d'abscisse 3 ;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.




On a :

**A.** pour tout $x \in ]0~;~5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

**B.** pour tout $x \in ]5~;~+\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

**C.** pour tout $x \in ]0~;~5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe ;

**D.** pour tout $x \in ]5~;~+\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Pour les questions **3.** et **4.**, on considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 15 \quad \text{et pour tout entier naturel } n \quad : u_{n+1} = 1.2u_n + 12.$$

**Question 3 :** La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier $n$ telle que $u_n > 10\,000$.

```
def seuil() :
    n=0
    u=15
    while ......:
      n=n+1
      u=1.2*u+12
    return(n)
```

À la ligne 4, on complète par :

**A.** u$\leqslant 10\,000$ ; **B.** u $= 10\,000$ **C.** u$> 10\,000$ ; **D.** $n \leqslant 10\,000$.

**Question 4 :** On considère la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 60$.
La suite $(v_n)$ est :

**A.** une suite décroissante ;
**B.** une suite géométrique de raison 1,2 ;
**C.** une suite arithmétique de raison 60 ;
**D.** une suite ni géométrique ni arithmétique.

**Question 5 :**

Soit deux réels $a$ et $b$ avec $a < b$.
On considère une fonction $f$ définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a \,;\, b]$ et qui s'annule en un réel $\alpha$.
Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de $\alpha$ à 0,001 est :

**A.**
```
def racine(a,b) :
    while abs(b - a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            b = m
        else :
            a = m
    return m
```

**C.**
```
def racine(a,b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b - a) <= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

**B.**
```
def racine(a,b) :
    m = (a + b)/2
    while abs(b - a) >= 0.001 :
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```

**D.**
```
def racine (a,b) :
    while abs (b - a) >= 0.001 :
        m = (a + b)/2
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else :
            b = m
    return m
```