N°75 p183

Il faut étudier les limites des deux fonctions encadrant $f(x)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{3x^2-x} = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5x}{3x^2-x} = \frac{2}{3}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{3}$.

N°77 p183

1. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2\sin x \leqslant 2 \Leftrightarrow x-2 \leqslant x+2\sin x \leqslant x+2$.
   Donc, pour tout $x > 0$, $\frac{x-2}{x} \leqslant \frac{x+2\sin x}{x} \leqslant \frac{x+2}{x}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

   De même, pour tout $x < 0$, en divisant par un nombre négatif, l'inégalité change de sens donc $\frac{x-2}{x} \geqslant \frac{x+2\sin x}{x} \geqslant \frac{x+2}{x}$.

   Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
2. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 2+\cos x \leqslant 3$.
   Donc pour tout $x > 0$, $x^3 \leqslant (2+\cos(x))x^3 \leqslant 3x^3$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
   De même, pour tout $x < 0$, on a $x^3 < 0$ donc $x^3 \geqslant (2+\cos(x))x^3$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.
3. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow x-1 \leqslant x+\sin x \leqslant x+1$, donc, pour tout $x > 1$, $\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x+\sin x} \geqslant \frac{1}{x+1}$, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, et donc $\frac{x}{x-1} \geqslant \frac{x}{x+\sin x} \geqslant \frac{x}{x+1}$, pour tout $x > 1$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$.

   De même, pour tout $x < -1$, $\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x+\sin x} \geqslant \frac{1}{x+1}$,car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

   Donc $\frac{x}{x-1} \leqslant \frac{x}{x+\sin x} \leqslant \frac{x}{x+1}$ pour tout $x < -1$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$.
4. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow -3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3 \Leftrightarrow x^2-3 \leqslant 3\sin x \leqslant x^2+3$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$. Et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$.

N°80 p183

1. Soit $x \geqslant 0$. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.
2. Pour tout $x \geqslant 0$, $x+2 \geqslant x$ d'où $\sqrt{x+2} \geqslant \sqrt{x}$,car la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$.
3. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right) = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.