N°84 p183

1. On a d'une part, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$. Et d'autre part, $\lim_{x \to -\infty} (x-1) = -\infty$. Donc, par somme, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
2. On a d'une part, $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x) = +\infty$. Et d'autre part comme, pour tout réel x, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ alors, par quotient, $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$. Et donc, par somme, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
3. Pour tout x réel, $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$. Or, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. De plus, $\lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$ donc, par quotient, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{e^x - x}{e^x + 1} = \frac{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{x}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$. Or, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. D'où, au final, par quotient, $\lim_{x \to +\infty} k(x) = 1$.
5. Pour tout $x > 0$, $\ell(x) = \frac{e^{2x} - x^3 e^x}{e^x + x} = \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)} = e^x \frac{1 - \frac{x^3}{e^x}}{1 + \frac{x}{e^x}}$. Or, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Et, d'après un théorème de croissance comparé, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$. Enfin, $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc, par somme, quotient et produit, $\lim_{x \to +\infty} \ell(x) = +\infty$.