Exercice 1

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$; $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

3) C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 4$
C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$
C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $-\infty$

Exercice 2

$f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$

1) $\forall x \neq 0 \quad f(x) = \dfrac{\cancel{x^2}(-2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(1 + \frac{1}{x^2})} = \dfrac{-2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} -2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} = -2$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$

par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$.

2) C_f admet une asymptote en $+\infty$ d'équa° $y = -2$.

Exercice 3

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{x^2+3}{x-1} = \dfrac{x^2(1 + \frac{3}{x^2})}{x(1 - \frac{1}{x})} = x \, \dfrac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{3}{x^2} = 1$ par quotient

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$

par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+3}{x-1} = +\infty}$

2) $\dfrac{5e^x + 3x}{2e^x + 1} = \dfrac{\cancel{e^x}(5 + 3\frac{x}{e^x})}{\cancel{e^x}(2 + \frac{1}{e^x})} = \dfrac{5 + 3\frac{x}{e^x}}{2 + \frac{1}{e^x}}$

Le théorème des croissances comparées donne $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; donc, par inverse $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

par produit et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 5 + 3\dfrac{x}{e^x} = 5$ $\quad$ par quotient

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; par inverse et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{e^x} = 2$ $\quad \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5e^x + 3x}{2e^x + 1} = \dfrac{5}{2}}$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} x-2 = 0^+$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{3}{x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ par composition $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{3}{x-2}} = +\infty$

4) $\forall x \geqslant 1 \quad \frac{x-1}{x+1} = \frac{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1.$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$

et, par somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ donc, d'après le Théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$