Exercice 1

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

3) C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$

C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $+\infty$

C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -4$ en $-\infty$

Exercice 2

$\forall x \neq 0 \qquad f(x) = \dfrac{\cancel{x^2}\left(-3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{-3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ donc, par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} -3 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2} = -3$

par quotient

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\dfrac{3}{2}$

2)

C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{-3}{2}$ en $+\infty$

Exercice 3

1) $\forall x \neq 0 \quad \dfrac{x^3 + x^2 + 3}{x^2 - 1} = \dfrac{x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{1 - \frac{1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1$

par produit

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^3}\right) = +\infty$ par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 3}{x^2 - 1} = +\infty.}$

2) $\dfrac{4e^x + 3x}{2e^x + 1} = \dfrac{e^x\left(4 + \frac{3x}{e^x}\right)}{e^x\left(2 + \frac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{4 + \frac{3x}{e^x}}{2 + \frac{1}{e^x}}$

Le théorème des croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

par inverse : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par produit et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 4 + \dfrac{3x}{e^x} = 4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{e^x} = 2$ par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4e^x + 3x}{2e^x + 1} = \dfrac{4}{2} = 2.}$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} x - 3 = 0^+$

par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x-3} = +\infty$

or

$\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ par composition $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \sqrt{\frac{5}{x-3}} = +\infty}$

4) $x \geq 2$ $\frac{x-2}{x+3} = \frac{x(1 - \frac{2}{x})}{x(1 + \frac{3}{x})}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{2}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1$ par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x+3} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ d'après le théorème des gendarmes

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$