Chap 10 - Equations différentielles

Terminales Spé Maths

Définition 0.1.
Une équation différentielle d'ordre n est une équation :

- dont l'inconnue est une fonction y de variable x, n fois dérivable.
- liant y et certaines de ses dérivées : $y'; y''; ...; y^{(n)}$

Résoudre une équation différentielle c'est déterminer l'ensemble des fonctions y dérivables sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation.

Exemple :

- Equation du premier ordre : $y' = 2y + 5\,;\ y' = y^2$
- Equation du second ordre $y'' + 4y = 0\,;\ x^2y'' - 2y' - 3y + 2x = 0$.

1 Equation homogène $y' = ay$

Théorème 1.1.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme $y(x) = k\mathrm{e}^{ax}; k \in \mathbb{R}$
Soient x_0,$y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution f qui vérifie $f(x_0) = y_0$

Démonstration. Les fonctions de la forme $y(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ sont bien solutions de l'équation car $y'(x) = ka\mathrm{e}^{ax} = ay(x)$.

Réciproquement supposons qu'il existe g solution de l'équation différentielle, posons $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$;
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ;$h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{-ax} - g(x)a\mathrm{e}^{-ax} = ag(x)\mathrm{e}^{-ax} - g(x)a\mathrm{e}^{-ax} = 0$

Donc $h(x) = k$ constante $\Leftrightarrow g(x)\mathrm{e}^{-ax} = k \Leftrightarrow g(x) = k\mathrm{e}^{ax}$
De plus, $f(x_0) = y_0$ donc $k\mathrm{e}^{ax_0} = y_0 \Leftrightarrow k = y_0\mathrm{e}^{-ax_0}$ est unique $f(x) = y_0\mathrm{e}^{a(x-x_0)}$ CQFD

2 Equation linéaire $y' = ay + b$

Théorème 2.1.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay+b$ sont de la forme $y(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}; k \in \mathbb{R}$
Soient x_0,$y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution f qui vérifie $f(x_0) = y_0$

Exemple :

Déterminer la solution y de l'équation $y' = -0.5y + 1$ et $y_0 = 3$ pour $x_0 = 0$

f est de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{-0.5x} - \dfrac{-1}{-0.5} = k\mathrm{e}^{-0.5x} + 2$
$f(0) = 3 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^0 + 2 = 3 \Leftrightarrow k = 1.$

Donc la solution est $f(x) = \mathrm{e}^{-0.5x} + 2.$

3 Equation de la forme $y' = ay + f(x)$

Théorème 3.1.
Pour résoudre une équation du type $y' = ay + f(x)$ où f est une fonction continue sur I

- On cherche une solution particulière
- On détermine l'ensemble des solutions en se ramenant à l'équation homogène $y' = ay$

Exemple :

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = 1 - 6x$

1. Le second membre de l'équation (E) est un fonction affine donc la solution particulière s'écrit $y_0 = ax + b$ donc $y_0' - 2y_0 = 1 - 6x \Leftrightarrow a - 2(ax + b) = 1 - 6x \Leftrightarrow -2ax + a - 2b = 1 - 6x.$

   Par identification, on a $\left\{\begin{array}{rcl} -2a = & = & -6 \\ a - 2b & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ 3 - 2b & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b & = & 1 \end{array}\right.$
   donc $y_0(x) = 3x + 1$ est une solution particulière de (E).

2. y et y_0 solution de (E) donc $\left\{\begin{array}{rcl} y' - 2y = & = & 1 - 6x \\ y_0' - 2y_0 & = & 1 - 6x \end{array}\right.$
   Donc par soustraction :
   $(y' - y_0') - 2(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (y' - y_0') = 2(y - y_0).$
   Posons pour tout réel x,$\phi(x) = y(x) - y_0(x)$
   Le problème peut s'écrire :
   $$\phi'(x) = 2\phi(x)$$
   D'après la partie précédente :
   $\phi(x) = ke^{2x}$

   $\Leftrightarrow y(x) - y_0(x) = k\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow y(x) = k\mathrm{e}^{2x} + 3x + 1$