Corrigé exercice 115 :

1. Soit y_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = mx + p$, où m et p sont deux réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y_0'} = \mathbb{R}$ car la fonction y_0 est affine. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) = m$. Ainsi y_0 est solution de $2y' + y = x + 1$ si, et seulement si,$2y_0' + y_0 = x + 1 \Leftrightarrow 2m + mx + p = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ 2m + p = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ p = 1 - 2m = -1 \end{cases}$. Ainsi, la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = x - 1$ est une solution particulière de l'équation $2y' + y = x + 1$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $2\varphi' + \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi' = -\frac{1}{2}\varphi$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $2y' + y = x + 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + x - 1$, où k est un réel.
2. Soit y_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = mx + p$, où m et p sont deux réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y_0'} = \mathbb{R}$ car la fonction y_0 est affine. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) = m$. Ainsi y_0 est solution de $y' + 3y = 2x - 1$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow m + 3mx + 3p = 2x - 1 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 3m = 2 \\ m + 3p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ p = \frac{-1-m}{3} = -\frac{5}{9} \end{cases}$. Ainsi, la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}$ est une solution particulière de l'équation $y' + 3y = 2x - 1$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $\varphi' + 3\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi' = -3\varphi$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-3x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + 3y = 2x - 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\mathrm{e}^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}$, où k est un réel.
3. Soit y_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y_0'} = \mathbb{R}$ car la fonction y_0 est une fonction trinôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) = 2ax + b$. Ainsi y_0 est solution de l'équation $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) - 3y_0(x) = -3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow 2ax + b - 3ax^2 - 3bx - 3c = -3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -3 \\ 2a - 3b = -1 \\ b - 3c = -2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$. Ainsi, la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = x^2 + x + 1$ est une solution particulière de l'équation $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $\varphi' - \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi' = 3\varphi$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = k\mathrm{e}^{3x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\mathrm{e}^{3x} + x^2 + x + 1$, où k est un réel.
4. Soit y_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y_0'} = \mathbb{R}$ car la fonction y_0 est une fonction trinôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) = 2ax + b$. Ainsi y_0 est solution de l'équation $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2y_0'(x) - 3y_0(x) = 3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow 4ax + b - 3ax^2 - 3bx - 3c = 3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 3 \\ 4a - 3b = -1 \\ 2b - 3c = -2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$. Ainsi, la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = -x^2 - x$ est une solution particulière de l'équation $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $2\varphi' - 3\varphi = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2}y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)k\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}} - x^2 - x$, où k est un réel.

Corrigé exercice 116 :

1. Soit y_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = (mx+p)\mathrm{e}^{-2x}$, où m et p sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y_0'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) = m\mathrm{e}^{-2x} - 2(mx+p)\mathrm{e}^{-2x} = (-2mx+m-2p)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Ainsi y_0 est solution de l'équation $y'+3y = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x)+3y_0(x) = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow (-2mx+m-2p+3mx+3p)\,\mathrm{e}^{-2x} = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$ $\Leftrightarrow (mx+m+p)\,\mathrm{e}^{-2x} = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m+p=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ p=0 \end{cases}$. Ainsi, la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = 2x\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation $y'+3y = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $\varphi'+3\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi' = -3\varphi$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = k\mathrm{e}^{-3x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y'+3y = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\mathrm{e}^{-3x} + 2x\mathrm{e}^{-2x}$,où k est un réel.
2. Soit y_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = (mx+p)\mathrm{e}^{x}$, où m et p sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y_0'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) = m\mathrm{e}^{x} + (mx+p)\mathrm{e}^{x} = (mx+m+p)\,\mathrm{e}^{x}$. Ainsi, y_0 est solution de l'équation $y'+y = (3-2x)\mathrm{e}^{x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x)+y_0(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{x} \Leftrightarrow (2mx+m+2p)\,\mathrm{e}^{x} = (3-2x)\mathrm{e}^{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m=-2 \\ m+2p=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ p=2 \end{cases}$.
Ainsi, la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = (2-x)\mathrm{e}^{x}$ est une solution particulière de l'équation $y'+y = (3-2x)\mathrm{e}^{x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $\varphi'+\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi' = -\varphi$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = k\mathrm{e}^{-x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y'+y = (3-2x)\mathrm{e}^{x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\mathrm{e}^{-x} + (2-x)\mathrm{e}^{x}$, où k est un réel.
3. Soit y_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y_0'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{-x} - (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x} = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)\,\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi y_0 est solution de l'équation $y'-2y = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x)-2y_0(x) = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x}$ $\Leftrightarrow (-3ax^2+(2a-3b)x+b-3c)\,\mathrm{e}^{-x} = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a=-3 \\ 2a-3b=-1 \\ b-3c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$.
Ainsi, la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation $y'-2y = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $\varphi'-2\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi' = 2\varphi$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = k\mathrm{e}^{2x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y'-2y = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\mathrm{e}^{2x} + (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$, où k est un réel.
4. Soit y_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x}$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y_0'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{2x} + 2(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x} = (2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)\,\mathrm{e}^{2x}$. Ainsi la fonction y_0 est solution de l'équation $y'+2y = -\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0'(x)+2y_0(x) = -\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow$ $(4ax^2+(2a+4b)x+b+4c)\,\mathrm{e}^{2x} = \left(-2x^2+x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=-2 \\ 2a+4b=1 \\ b+4c=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{4} \end{cases}$. Ainsi, la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2x}$ est une solution particulière de l'équation $y'+2y = -\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $\varphi'+2\varphi = 0 \Leftrightarrow$

$\varphi' = -2\varphi$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = k\mathrm{e}^{-2x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + 2y = -\left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\mathrm{e}^{-2x} + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2x}$, où k est un réel.