Corrigé exercice 124 :

1. Comme N est dérivable et ne s'annule pas sur $I = [0; +\infty[$ alors $g = \frac{1}{N}$ est dérivable sur I. Et, pour tout $t \geqslant 0$, $g'(t) = -\frac{N'(t)}{(N(t))^2}$.
2. N est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $t \geqslant 0$, $N'(t) = 3N(t) - 0{,}005\,(N(t))^2$. En divisant les deux membres de cette égalité par $-(N(t))^2 \neq 0$, on obtient alors $-\frac{N'(t)}{(N(t))^2} = -3 \times \frac{1}{N(t)} + 0{,}005$, c'est-à-dire $g'(t) = -3g(t) + 0{,}005$. Donc g est solution de $(E') : y' = -3y + 0{,}005$.
3. (E') est de la forme $y' = ay + b$, $a \neq 0$, de solutions $t \mapsto Ce^{at} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle. On est dans le cas où $a = -3$, $b = 0{,}005$ et donc $\frac{b}{a} = -\frac{1}{600}$. Les solutions de (E') sont donc les fonctions définies sur I par $t \mapsto Ce^{-3t} + \frac{1}{600}$, où C est un réel. Puisque, pour tout $t \in I$, $g(t) = \frac{1}{N(t)} \Leftrightarrow N(t) = \frac{1}{g(t)}$, on en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $t \mapsto \frac{1}{Ce^{-3t} + \frac{1}{600}}$, où C est un réel, c'est-à-dire $t \mapsto \frac{600}{600Ce^{-3t} + 1}$, où C est un réel.
4. (a) On détermine C tel que $N(0) = 2000 \Leftrightarrow \frac{600}{600C+1} = 2000 \Leftrightarrow C = -\frac{7}{6000}$. La solution vérifiant la condition initiale de l'énoncé est donc définie sur I par $N(t) = \frac{600}{600 \times \left(-\frac{7}{6000}\right)e^{-3t} + 1} = \frac{600}{-\frac{7}{10}e^{-3t} + 1} = \frac{6000}{10 - 7e^{-3t}}$.

   (b) Au bout de 2 heures, $N(2) = \frac{6000}{10 - 7e^{-6}} \approx 601$ bactéries sont présentes dans l'enceinte.