Chapitre 2 - Suites numériques

Terminales Spé Maths

Table des matières

1 Raisonnement par récurrence **2**

2 Rappels suites numériques **3**

3 Limites finies et suites convergentes **3**

3.1 Définitions et propriétés . . . 3

3.2 Théorème de convergence monotone . . . 4

4 Limites infinies **4**

5 Opérations sur les limites **6**

5.1 Limite d'une somme de suites . . . 6

5.2 Limite d'un produit de suites . . . 6

5.3 Limite d'un quotient de suites . . . 6

6 Limites et comparaison **7**

1 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence ne peut être utilisé que lorsque que l'on souhaite montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.1.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ On considère la proposition $\mathcal{P}_n$ définie pour tout $n \geqslant n_0$.
Si les deux propositions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{P}_n$ est vraie pour n_0 (Initialisation)
2. Pour tout $k \geqslant n_0$ si la proposition ($\mathcal{P}_k$ vraie) implique que ($\mathcal{P}_{k+1}$ vraie) (Hérédité)

Alors $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Remarque .
la proposition ($\mathcal{P}_k$ vraie) est appelée **Hypothèse de récurrence**

Exemple :
On considère une suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n; u_{n+1} = 0.3u_n + 7$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,$u_n \leqslant 10$.
La proposition $\mathcal{P}_n$ est $u_n \leqslant 10$.

1. **Initialisation** : $n_0 = 0; u_0 = 2 \leqslant 10$ donc la propriété est vraie pour $n_0 = 0$
2. **Hypothèse de récurrence** : Supposons qu'il existe $k \geq n_0$ tel que $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est à dire $u_k \leqslant 10$.
3. **Hérédité** :On veut montrer que $u_{k+1} < 10$. Or $u_{k+1} = 0.3u_k + 7 \leqslant 0.3 \times 10 + 7 \Leftrightarrow u_{k+1} \leqslant 10$ donc on a montré que si $\mathcal{P}_k$ est vraie alors $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
4. **Conclusion** : La propriété $u_n \leqslant 10$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$

EXERCICE 1
Démontrer une égalité par récurrence
EXERCICE 2
La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
Démontrer par récurrence, que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = 2^n - 1$.

EXERCICE 3
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}; 1 + 2 + 3 + \ldots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Propriété 1.1.
Inégalité de Bernoulli
Pour tout réel $a > 0$; Pour tout $n \in \mathbb{N}; (1 + a)^n \geqslant 1 + na$

Démonstration. **Initialisation** : Pour $n = 0$; on a l'égalité $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $(1 + a)^k \geqslant 1 + ka$

Hérédité : On veut montrer que $(1 + a)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)a$

Partant de $(1 + a)^{k+1} = (1 + a)^k(1 + a) \geqslant (1 + ka)(1 + a)$ d'après H.R.
$(1 + a)^{k+1} \geqslant 1 + ka + a + ka^2$
Or $ka^2 > 0$ donc
$(1 + a)^{k+1} \geqslant 1 + ka + a$
et en factorisant a
$(1 + a)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)a$
On a montré l'hérédité.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}; (1 + a)^n \geqslant 1 + na$

CQFD

2 Rappels suites numériques

Le programme de Terminale repose essentiellement sur la démonstration par récurrence et les limites de suites. Cependant les exercices reprennent toutes les notions vues en classe de Première. Nous les reverrons dans ce chapitre mais si vous souhaitez revoir les notions de première sur les suites numériques :

- Résumé suites 1ere
- Vous pouvez faire les exercices concernant la représentation graphique de suite, les suites arithmético-géométriques et le sens de variation. Exercices

D'autre part, ce chapitre demande quelques connaissances en python. Au BAC, vous pouvez avoir à interpréter un programme ou à compléter un programme.

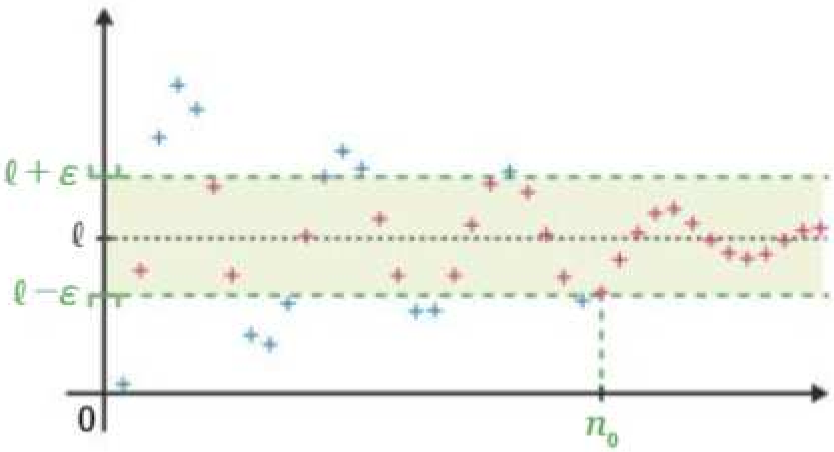
3 Limites finies et suites convergentes

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1.
Soit l un réel. Une suite (u_n) a pour limite l quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0. On dit alors que la suite (u_n) est **convergente** et qu'elle converge vers l.
Cela revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $|u_n - l| < \varepsilon$.

Remarque .
Une suite **divergente** est une suite qui ne converge pas.

Exemple :
Sur le graphique ci-dessous, on voit qu'à partir d'un rang n_0, tous les termes de la suites sont à une distance ε aussi petite que l'on veut de la limite l.



Propriété 3.1.
La limite d'une suite (u_n) convergente est unique. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Démonstration. **Inégalité triangulaire** : on part du résultat suivant pour démontrer cette propriété : pour tous réels a et b on a $|a+b| < |a| + |b|$
Supposons que la suite u_n tendent vers deux limites l et l' différentes.
pour tout $\varepsilon > 0$; il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$; $|u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

pour tout $\varepsilon > 0 > 0$ il existe un entier n_1 tel que pour tout $n > n_1$; $|u_n - l'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Donc pour tout $n > max(n_0; n_1)$, on a $|l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| < |l - u_n| + |u_n - l'|$ d'après l'inégalité triangulaire et donc $|l - l'| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ aussi petit que souhaité, $|l - l'| < \varepsilon$ donc $l = l'$. CQFD

Propriété 3.2.

1. $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
3. $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
4. pour $k \geqslant 1$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$
5. Si $-1 < q < 1$; $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ Démonstration en fin de chapitre

Démonstration. Faite en classe. CQFD

Remarque .
Limite finie
Limite infinie

Exemple :
Etudier l'application - méthode 1 p131.

3.2 Théorème de convergence monotone

Définition 3.2.

- Une suite (u_n) est majorée par un réel M lorsque pour tout entier $n; u_n \leqslant M$. On dit que M est un majorant de (u_n)
- Une suite (u_n) est minorée par un réel m lorsque pour tout entier $n; u_n \geqslant m$. On dit que m est un minorant de (u_n)
- Une suite (u_n) majorée et minorée est dite bornée.

Théorème 3.1 (admis).

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

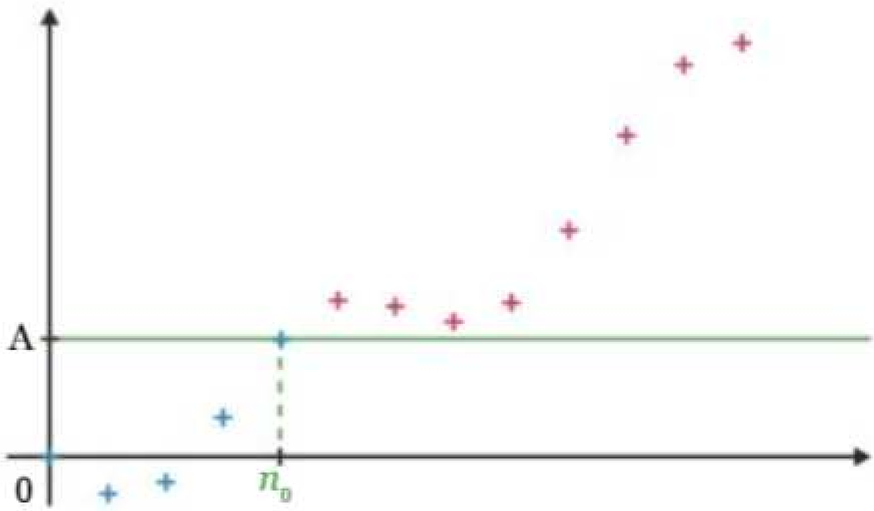
Exemple :

Etudier l'application - méthode 2 p132.
EXERCICE 4
Convergence de suites monotones

4 Limites infinies

Définition 4.1.
Une limite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque, pour pour tout réel A ; l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. C'est à dire que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $u_n \geqslant A$.

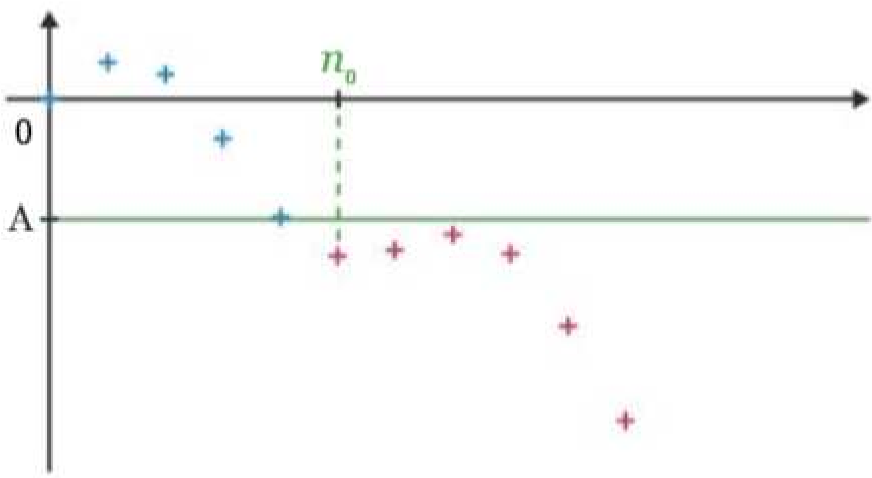
Exemple :
Sur le graphique ci-dessous, on voit que pour tout A choisi, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A.



Propriété 4.1.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- Pour $k \geqslant 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$
- Si $q > 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ Démonstration en fin de chapitre

Définition 4.2.
Une limite (u_n) a pour limite $-\infty$ lorsque, pour pour tout réel A ; l'intervalle $]-\infty; A][$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. C'est à dire que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $u_n \leqslant A$.

Exemple :
Sur le graphique ci-dessous, on voit que pour tout A choisi, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à A.



Propriété 4.2.
- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$

Démonstration. • **Démonstration BAC** Soit (u_n) une suite croissante non majorée et A un réel.
u_n est non majorée, donc il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > A$.

u_n est croissante donc pour tout $n \geqslant n_0$ alors $u_n \geqslant u_{n_0} > A$ donc $u_n > A$.
On a montré que pour A réel, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ $u_n > A$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

- En exercice.

CQFD

Exemple :
Etudier Application et méthode 3 p 134.

EXERCICE 5
Limites de suites géométriques

5 Opérations sur les limites

5.1 Limite d'une somme de suites

Si (u_n) a pour limite	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

5.2 Limite d'un produit de suites

Si (u_n) a pour limite	l	$l \neq 0$	∞	0
et si (v_n) a pour limite	l'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$l \times l'$	∞ *	∞ *	Forme indéterminée

* le signe est déterminé par la règle des signes d'un produit.

5.3 Limite d'un quotient de suites

Limite d'un quotient si la limite du dénominateur n'est pas nulle

Si (u_n) a pour limite	l	l	∞	$\pm\infty$
et si (v_n) a pour limite	$l' \neq 0$	∞	$l' \neq 0$	$\pm\infty$
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{l}{l'}$	0 *	∞ *	Forme Indéterminée

* : on détermine le signe avec la règle des signes

Limite d'un quotient si la limite du dénominateur est nulle

Si (u_n) a pour limite	$l \neq 0$ ou ∞	0
et si (v_n) a pour limite	0 en gardant un signe constant	0
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	∞	Forme indéterminée

Exemple :
Etudier les Applications et méthodes 4-5-6-7 p135-136-137

EXERCICE 6
Limite de suites

6 Limites et comparaison

Théorème 6.1 (Théorème de comparaison).
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un rang n_0.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

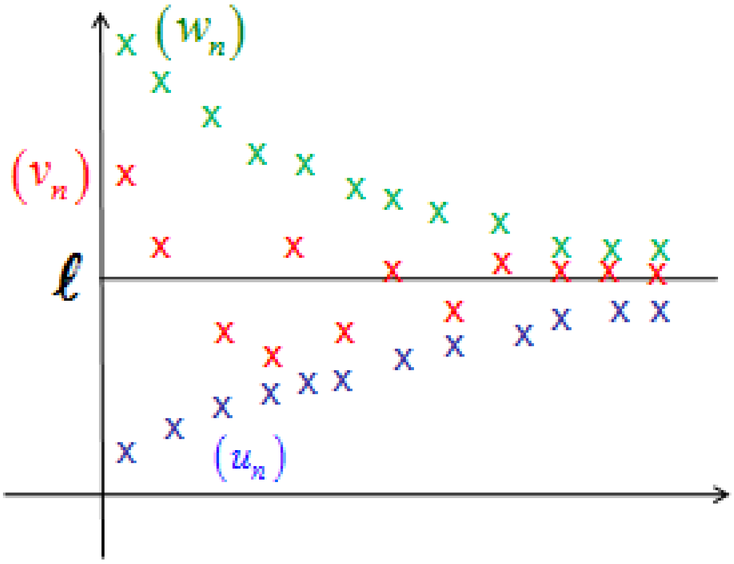
Démonstration. Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0; u_n \leqslant v_n$

- **Démonstration BAC** Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$ alors $u_n > A$.
  Donc en prenant $N = max(n_0; n_1)$ pour tout $n \geqslant N; v_n \geqslant u_n > A$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$ alors $v_n < A$.
  Donc en prenant $N = max(n_0; n_1)$ pour tout $n \geqslant N; u_n \leqslant v_n < A$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

CQFD

Exemple :
Etudier l'application et méthode 8 p 139

Théorème 6.2 (Théorème des gendarmes).
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que à partir d'un certain rang on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l, alors (v_n) converge aussi vers l.



Exemple :

Etudier l'Application et méthode 9 p 139

EXERCICE 7

Limites et comparaison

Démonstration. **Pté 2.2 et Pté 3.1 - Démonstration de BAC**

Si $q > 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Si $-1 < q < 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

1. $q > 1$ donc il existe $a > 0$ tel que $q = 1 + a$, d'après l'inégalité de Bernoulli, $q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$
   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$
   Donc par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
2. $-1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$ donc $\dfrac{1}{|q|} > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$.
   Par inverse, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \lim\limits_{n \to +\infty} |q|^n = 0$

CQFD