Corrigé exercice 105 :

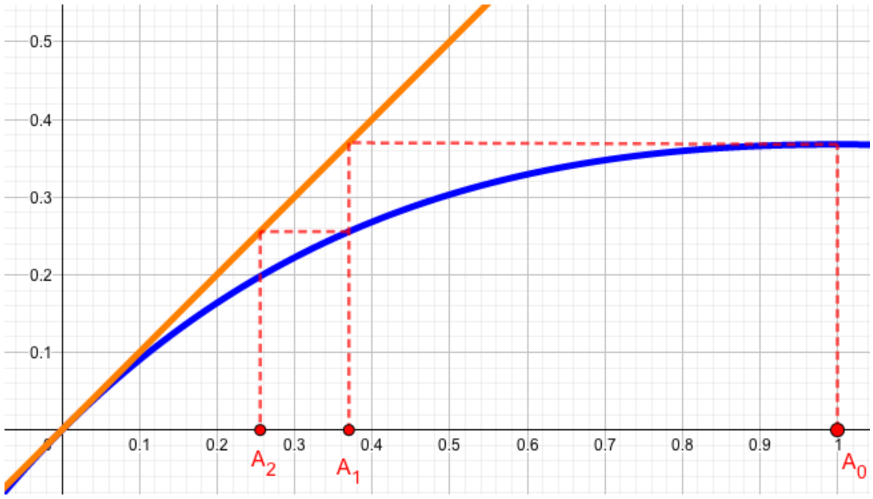
Partie A

La fonction f est une fonction définie et dérivable sur $[0;\infty[$ comme produit de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $x \in [0;\infty[$, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-\mathrm{e}^{-x}) \times x = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$. Or, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $1-x$.
Or, $1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0;1]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[1;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Partie B

1. On obtient le graphique suivant.



2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $1 \geqslant u_n > 0$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation : Pour $n = 0$.
   $u_0 = 1$ donc on a bien $1 \geqslant u_0 > 0$. On en déduit que P_0 est vraie.
   HR : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $1 \geqslant u_k > 0$.
   Hérédité : On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $1 \geqslant u_{k+1} > 0$.
   Par hypothèse de récurrence, on a $1 \geqslant u_k > 0$. Or, comme la fonction f est croissante sur $[0;1]$, on en déduit que $f(1) \geqslant f(u_k) > f(0)$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^{-1} \geqslant u_{k+1} > 0$.
   Donc $1 \geqslant u_{k+1} > 0$.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $1 \geqslant u_n > 0$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante revient à montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

   Nous pouvons le montrer par récurrence
   Initialisation : $0 < u_1 = e^{-1} < u_0 = 1$
   HR : On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $0 < u_{k+1} < u_k < 1$.
   Hérédité : Montrons que $0 < u_{k+2} < u_{k+1} < 1$. On a montré dans la partie A que f est croissante sur [0 ;1]. $0 < u_{k+1} < u_k < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(u_{k+1}) < f(u_k) < f(1) \Leftrightarrow 0 < u_{k+2} < u_{k+1} < e^{-1} < 1$.
   On a montré l'hérédité.
   Conclusion : u_n est décroissante.

4. (a) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

   (b) On a $x\mathrm{e}^{-x} = x \Leftrightarrow x\mathrm{e}^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x(\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0$

   $\Leftrightarrow x = 0$ ou $\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   Ainsi, la limite de la suite (u_n) vaut 0.

Partie C

$u \leftarrow 1$

$S \leftarrow u$

Pour k variant de 1 à 100 :

  $u \leftarrow u \times \mathrm{e}^{-u}$

  $S \leftarrow S + u$

Fin Pour