N°25 p145

1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} + n^2 = +\infty$.
2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^4} = 0$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{1}{n^4} = 3$.
3. Comme $\dfrac{4}{3} > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n + \dfrac{1}{n^2} = +\infty$.
4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} - n^3 = -\infty$.
5. Comme $\pi > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi^n = +\infty$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
   D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n + \pi^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -(n + \pi^n) = -\infty$.
6. Comme $-1 < \dfrac{7}{10} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{10}\right)^n = 0$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$.
   D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} -4 + \left(\dfrac{7}{10}\right)^n + n^5 = +\infty$.

N°27 p145

1. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 + 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 3 = +\infty$.
   D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^5 + 4)(n - 3) = +\infty$.
2. Comme $-1 < \dfrac{185}{192} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{185}{192}\right)^n = 0$.
   D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 \times \left(\dfrac{185}{192}\right)^n = 0$.
3. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 8n - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 3$.
   D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (8n - 2)\left(3 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$.
4. Comme $\dfrac{144}{121} > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{144}{121}\right)^n = +\infty$.
   D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 \times \left(\dfrac{144}{121}\right)^n = -\infty$.
5. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 6 - n^4 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} + 7 = 7$.
   D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (6 - n^4)\left(\dfrac{1}{n^3} + 7\right) = -\infty$.
6. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - n^7 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^9 + 1 = +\infty$.
   D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (4 - n^7)(n^9 + 1) = -\infty$.

N°31 p145

1. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2+4=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+2=+\infty$. On ne peut pas conclure directement.

   Mais, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{3n^2+4}{2n+2}=\dfrac{n^2\left(3+\dfrac{4}{n^2}\right)}{n\left(2+\dfrac{2}{n}\right)}=\dfrac{n\left(3+\dfrac{4}{n^2}\right)}{2+\dfrac{2}{n}}$. Or, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{4}{n^2}=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{2}{n}=2$. Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(3+\dfrac{4}{n^2}\right)=+\infty$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(3+\dfrac{4}{n^2}\right)}{2+\dfrac{2}{n}}=+\infty$.

2. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^n}{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n}=\left(\dfrac{\dfrac{7}{5}}{\dfrac{4}{3}}\right)^n=\left(\dfrac{21}{20}\right)^n$.

   Or, comme $\dfrac{21}{20}>1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{21}{20}\right)^n=+\infty$.

3. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{2n-4}{7-3n}=\dfrac{n\left(2-\dfrac{4}{n}\right)}{n\left(\dfrac{7}{n}-3\right)}=\dfrac{2-\dfrac{4}{n}}{\dfrac{7}{n}-3}$.

   Or, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{4}{n}=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7}{n}-3=-3$.

   Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{4}{n}}{\dfrac{7}{n}-3}=\dfrac{2}{-3}=-\dfrac{2}{3}$.

4. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a $\dfrac{12n^2}{5n^7}=\dfrac{12}{5n^5}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^5=+\infty$.

   Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{12}{5n^5}=0$.

5. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=\left(\dfrac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{2}{3}}\right)^n=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

   Or, comme $-1<\dfrac{2}{5}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$.

6. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{n^2-1}{n+1}=\dfrac{(n+1)(n-1)}{n+1}=n-1$.
   Donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1=+\infty$.