Corrigé 49 p27

On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ...n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$

HR : on suppose qu'il existe $k > 1$ tel que , $S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ...k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Hérédité :

On veut montrer que $S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ...(k+1)^2 = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \dfrac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$

$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ...k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \dfrac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \dfrac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} = \dfrac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6}$

On a montré l'hérédité

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ...n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$