N°51 p148

1. En 2015, cette personne aura $2000 \times 1{,}03 + 150 = 2210$ € sur son compte épargne.
   En 2016, elle aura $2210 \times 1{,}03 + 150 = 2426{,}3$ € sur son compte épargne.
2. D'une année à l'autre, le solde disponible sur le compte épargne augmente de 3 % grâce aux intérêts. Il est donc multiplié par 1,03. De plus, chaque année la personne dépose 150 € sur son compte épargne, on ajoute donc 150 au solde disponible. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 150$.
3. Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = u_{n+1} + 5000$
   $= 1{,}03u_n + 150 + 5000$
   $= 1{,}03u_n + 5150$
   $= 1{,}03\left(u_n + \dfrac{5150}{1{,}03}\right)$
   $= 1{,}03(u_n + 5000)$
   $= 1{,}03v_n$.
   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 5000 = 7000$.
4. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = v_0 \times q^n = 7000 \times 1{,}03^n$.
   D'où $u_n = v_n - 5000 = 7000 \times 1{,}03^n - 5000$.
5. Comme $1{,}03 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}03^n = +\infty$. D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 7000 \times 1{,}03^n = +\infty$. Ainsi, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 7000 \times 1{,}03^n - 5000 = +\infty$.
6. (a) L'appel programme(4000) renvoie 9.
   (b) Au bout de 9 ans, le solde disponible sur le compte épargne dépassera les 4000 €.

N°49 p147

1. (a) La formule saisie dans la cellule B3 est = B2/(RACINE(B2^2+1)).
   (b) La suite (r_n) semble être décroissante.
   (c) La suite (r_n) semble converger vers 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $0 < r_n \leqslant 1$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation : Pour $n = 0$. On a $r_0 = 1$ donc $0 < r_0 \leqslant 1$. On en déduit que P_0 est vraie.
   Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $0 < r_k \leqslant 1$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $0 < r_{k+1} \leqslant 1$.
   Par hypothèse de récurrence, on a $0 < r_k \leqslant 1$. Comme la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on a $0^2 + 1 < r_k^2 + 1 \leqslant 1^2 + 1 \Leftrightarrow 1 < r_k^2 + 1 \leqslant 2$.
   De plus, la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, d'où $\sqrt{1} < \sqrt{r_k^2 + 1} \leqslant \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{r_k^2 + 1} \leqslant \sqrt{2}$.
   Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$, on a alors $1 > \dfrac{1}{\sqrt{r_k^2+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$.
   Enfin, par hypothèse de récurrence, on a $r_k > 0$ d'où $r_k > \dfrac{r_k}{\sqrt{r_k^2+1}} > 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant r_k > r_{k+1} > 0$, par hypothèse de récurrence.
   Ainsi, P_0 est vraie et, pour tout entier k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $0 < r_n \leqslant 1$.
3. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n on a $r_{n+1} < r_n$ donc la suite (r_n) est décroissante.

4. Comme la suite (r_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.
5. $\ell = \dfrac{\ell}{\sqrt{\ell^2+1}} \Leftrightarrow \ell(\sqrt{\ell^2+1}-1) = 0$
   $\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\sqrt{\ell^2+1}-1 = 0$
   $\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell^2+1 = 1$
   $\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 0$
   Donc la suite (r_n) converge vers 0.