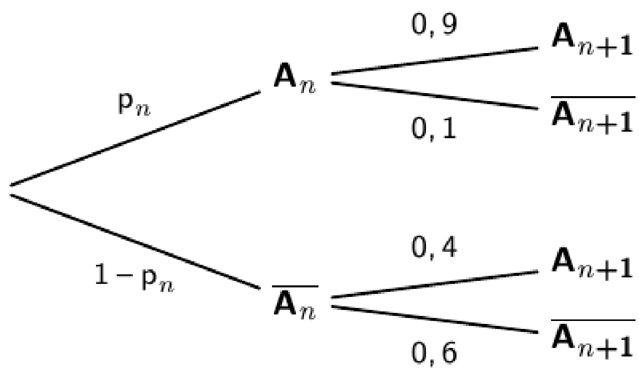
N°94p153

1. On peut construire l'arbre de probabilité ci-dessous.



D'après la formule des probabilités totales, on a :
$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \bar{A_n}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + P_{\bar{A_n}}(A_{n+1}) \times p(\bar{A_n}) = p_n \times 0{,}9 + (1 - p_n) \times 0{,}4 = 0{,}5p_n + 0{,}4$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n la proposition : « $p_n > 0{,}8$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Initialisation : Pour $n = 1$.
   $p_1 = 1 > 0{,}8$. On en déduit que P_1 est vraie.
   Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 1$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $p_k > 0{,}8$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $p_{k+1} > 0{,}8$.
   Par hypothèse de récurrence, on a $p_k > 0{,}8$.
   D'où $0{,}5p_k > 0{,}4 \Leftrightarrow 0{,}5p_k + 0{,}4 > 0{,}8 \Leftrightarrow p_{k+1} > 0{,}8$.
   Ainsi, P_1 est vraie et, pour un tout entier k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie donc $p_n > 0{,}8$.

   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $p_{n+1} - p_n = 0{,}5p_n + 0{,}4 - p_n = -0{,}5p_n + 0{,}4$.
   Or, $p_n > 0{,}8 \Leftrightarrow -0{,}5p_n < -0{,}4 \Leftrightarrow -0{,}5p_n + 0{,}4 < 0$.
   Donc $p_{n+1} - p_n < 0$ et alors la suite (p_n) est décroissante.

   (c) La suite (p_n) est décroissante et minorée par 0,8 donc elle converge vers un réel ℓ.

3. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5p_n + 0{,}4 - 0{,}8$
   $= 0{,}5p_n - 0{,}4 = 0{,}5(p_n - 0{,}8) = 0{,}5v_n$.
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_1 = p_1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

   (b) On a alors $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$.
   D'où $p_n = 0{,}8 + v_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$.

   (c) Comme $-1 < 0{,}5 < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^{n-1} = 0$. Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1} = 0$. Et donc, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8$.