Chap 3 - Continuité d'une fonction

Terminale Spé maths

Table des matières

1 Histoire des mathématiques

Au $16^{\text{ème}}$ siècle, le principe de la continuité est considéré comme géométriquement évident. Un exemple simple concerne les courbes que l'on trace sans lever le crayon. Cette approche ne suffit pas pour définir la continuité.
En 1769, Joseph-Louis Lagrange propose deux démonstrations du principe de continuité mais ses preuves ne sont pas convaincantes. C'est en 1817 que Bernard Bolzano donne la première définition moderne de la continuité.
En 1821, Auguste Cauchy énonce à son tour le principe connu de nos jours sous le nom de **Théorème des valeurs intermédiaires**.

2 Continuité d'une fonction

Définition 2.1.
Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel a. On dit que f est continue en a si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Une fonction f est continue sur un intervalle I, si elle est continue pour tout $a \in I$.

Exemple :

Etudier application et méthode p 194

Propriété 2.1.

1. Les fonctions usuelles (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
2. Toute fonction construite algébriquement (par somme, produit, inverse ou composée) à partir de fonctions usuelles est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition.
3. On convient qu'une flèche oblique dans un tableau de variation traduit la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.
4. Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Remarque .
Attention, la réciproque de la propriété 4 est fausse.
Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Démonstration. du 4. Pour tout $x \neq 0$ on pose $t(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Par produit en croix, on a $t(x)(x - a) = f(x) - f(a) \Rightarrow f(x) = (x - a)t(x) + f(a)$.
f est dérivable en a donc $\lim\limits_{x \to a} t(x) = f'(a)$. De plus $\lim\limits_{x \to a}(x - a) = 0$.
Donc, par produit et par somme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

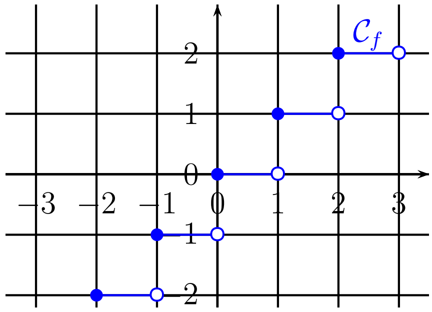
CQFD

Interpréter graphiquement la continuité d'une fonction

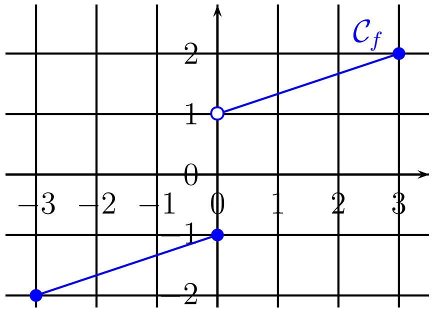
Par convention, une fonction est continue là où elle est tracée. S'il n'y a pas continuité en x_0 :
— le symbole $\bullet$ indique le point de la courbe de coordonnées $(x_0\ ;\ f(x_0))$;
— le symbole $\circ$ indique un point qui n'appartient pas à la courbe mais dont l'ordonnée est égale à la limite à gauche ou à droite en x_0.

Déterminer graphiquement les intervalles sur lesquels f est continue.

1. Soit la fonction partie entière $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.



2. Soit la fonction f représentée ci-dessous.



1. En tout point d'abscisse $a \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{C}_f$ présente un saut : on a $f(a) = a$ mais $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = a - 1$. Ainsi, f n'est pas continue en a mais f est continue sur tout intervalle $[a\ ;\ a+1[$.
2. f est « affine par morceaux ». $\mathcal{C}_f$ a un « saut » en 0 donc f n'est pas continue sur $[-3\ ;\ 3]$ mais elle est continue sur $[-3\ ;\ 0]$ et $]0\ ;\ 3]$. En effet, on a $f(0) = -1$ mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$.

3 Théorème des valeurs intermédiaires

3.1 Théorème

Théorème 3.1 (T.V.I : Cas général).
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.
Si f est continue sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque .
f prend au moins une fois toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a\ ;\ b]$ et, sur $[a\ ;\ b]$, la courbe représentative de f coupe la droite d'équation $y = k$ en un point au moins.

T.V.I : Cas général Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.
Si f est continue sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration. f est continue sur $[a,b]$ avec $a \leq b$ et $f(a) \leq f(b)$. On veut démontrer que pour tout $k \in [f(a); f(b)]$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.
On note que si $k \in [f(a); f(b)]$ alors $k \in [f(a); f(\frac{a+b}{2})]$ ou $k \in [f(\frac{a+b}{2}); f(b)]$

Soient deux suites a_n et b_n avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq k$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$
- Sinon $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$

Montrons par récurrence que pour tout entier n ; $a_n < b_n$
$a_0 = a < b = b_0$ la propriété est vraie en $n = 0$
Supposons qu'il existe un entier $k > 0$ tel que $a_k < b_k$. Alors :
Si $f(\frac{a_k+b_k}{2}) \geq 0; a_{k+1} - b_{k+1} = a_k - \frac{a_k+b_k}{2} = \frac{a_k-b_k}{2} < 0$ d'après HR.
Si $f(\frac{a_k+b_k}{2}) \leq 0; a_{k+1} - b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2} - b_n = \frac{a_k-b_k}{2} < 0$ d'après HR.
Donc $a_{k+1} < b_{k+1}$, on a montré l'hérédité donc pour tout entier n ; $a_n < b_n$

Montrons que a_n est croissante et que b_n est décroissante.
Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq 0; a_{n+1} - a_n = 0$ et $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n+b_n}{2} - b_n = \frac{a_n-b_n}{2} < 0$
Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq 0; a_{n+1} - a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} > 0$ et $b_{n+1} - b_n = 0$
Donc a_n est croissante et b_n est décroissante.

Montrons que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
En $n = 0$: $b_0 - a_0 = b - a = \frac{b-a}{2^0}$ la propriété est vraie pour $n = 0$.
On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$

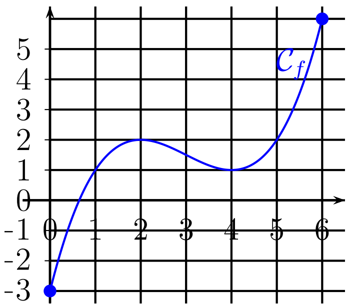
Alors :
Si $f(\frac{a_k+b_k}{2}) \geq 0; b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2} - a_k = \frac{b_k-a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k \times 2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$
Si $f(\frac{a_k+b_k}{2}) \leq 0; b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - \frac{a_k+b_k}{2} = \frac{b_k-a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k \times 2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$

On a montré l'hérédité donc $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ a_n est croissante est majorée par b donc elle converge et b_n est décroissante est minorée par a donc elle converge. On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l'$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = l' - l = 0$ donc $l = l'$ les deux suites ont la même limite c.
On sait par construction que pour tout n entier $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$ et f est continue sur $[a; b]$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$. On obtient $k = f(c)$ CQFD

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 6]$ par $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



On dresse le tableau de variation de f.
f admet pour minimum -3 et pour maximum 6.
f est continue sur $[0\ ;\ 6]$.

x	0		2		4		6
f	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	6

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs de $[-3\ ;\ 6]$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0\ ;\ 6]$.

Exemple :
Etudier Application et Méthodes 3 p 196

Théorème 3.2 (Cas d'une fonction strictement monotone : Théorème de la bijection).
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.
Si f est continue et **strictement monotone** sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** réel c appartenant à $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration. Soit k réel tel que $f(a) \leq k \leq f(b)$.
Comme f est continue sur $[a; b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe un réel c de $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

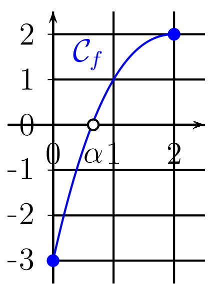
- Dans le cas où f est strictement croissante sur $[a; b]$, on a :
  — Pour tout $x \in [a; c[$, $f(x) < f(c)$; c'est à dire $f(x) < k$.
  — Pour tout $x \in]c; b]$, $f(x) > f(c)$; c'est à dire $f(x) > k$.
  L'équation $f(x) = k$ n'admet donc pas d'autre solution que c dans l'intervalle $[a; b]$.
- Refaire la même démonstration pour f décroissante.

CQFD

Exemple :
Etudier Application et Méthodes 4 p 196

Exemple :

Reprenons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



x	0		α		2
f	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2

Sur $[0 ~;~ 2]$, f est continue, strictement croissante et admet pour minimum -3 et maximum 2.
Donc, f prend une fois, et une seule, toutes les valeurs intermédiaires entre -3 et 2.
En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α entre 0 et 2.

Remarque .
Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique aussi pour f continue sur un intervalle I de type : $[a ~;~ b[$, $]a ~;~ b]$, $]a ~;~ b[$, $[a ~;~ +\infty[$, $]a ~;~ +\infty[$, $]-\infty ~;~ b]$ ou $]-\infty ~;~ b[$, $]-\infty ~;~ +\infty[$.
Si une borne a ou b de l'intervalle est ouverte, alors on remplace $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f en cette borne ; si une borne de l'intervalle est $\pm\infty$, alors on considère la limite de f en $\pm\infty$.

Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires Le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.) est utile pour prouver l'existence d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ et dénombrer ces solutions. Pour cela :

— On dresse le tableau de variation de la fonction f ;
— On applique le T.V.I. à chaque intervalle où la fonction est strictement monotone.

Exemple :
Dénombrer les solutions de l'équation (E) : $x^4 + 3x^3 + x^2 + 1 = 0$.

$f : x \mapsto x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$ est une fonction polynôme de degré 4 dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x = x(4x^2 + 9x + 2) = x(x+2)(4x+1)$ après factorisation du trinôme.
On établit alors le tableau de signes de $f'(x)$ et de variation de f :

x	$-\infty$	α	-2	β	$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	0	-3	0	$\simeq 1,02$		1		$+\infty$

— Sur $]-\infty ~;~ -2]$, f est continue, strictement décroissante et : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $f(-2) = -3$.
Donc, d'après le T.V.I., l'équation (E) a une unique solution α inférieure à -2.

— Sur $\left[-2 ~;~ -\frac{1}{4}\right]$, f est continue, strictement croissante et : $f(-2) = -3$; $f\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 1,02 > 0$.
Donc, d'après le T.V.I., l'équation (E) a une unique solution β comprise entre -2 et $-\frac{1}{4}$.

— Sur $\left[-\frac{1}{4} ~;~ 0\right]$ et $[0 ~;~ +\infty[$, le minimum de f est $1 > 0$ donc on n'y trouve pas de solution.

Conclusion : l'équation (E) admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

4 Application aux suites

Propriété 4.1.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et une suite u_n d'élément de I convergent vers $a \in I$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Théorème 4.1 (Théorème du point fixe).
Soit f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans I et (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si u_n converge vers $l \in I$ alors l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration. La suite u_n converge vers l donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
f est continue sur I donc f est continue en f. donc $\lim\limits_{x \to l} f(x) = f(l)$.
Par composition, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(l)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ donc, par unicité de la limite, on a $f(l) = l$ CQFD

Exemple :

Applications et méthodes p 197