Corrigé exercice 62 :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et d'une constante. On en déduit qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$.La fonction exponentielle étant toujours positive, f' a le même signe que $x \mapsto 1-x$, d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}+1$	$\searrow$	1

Sur $[1\,;+\infty[$, le minimum de f vaut 1 qui est strictement positif. L'équation $f(x)=0$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle. Sur $]-\infty\,;\,1]$, la fonction est continue et strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1}+1 > 0$. Comme $0 \in]-\infty\,;\,\mathrm{e}^{-1}+1]$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;\,1]$ et donc une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α dans l'énoncé.

2. On obtient, à l'aide de la calculatrice par exemple, $-0{,}6 < \alpha < -0{,}5$.

Corrigé exercice 66 :

Soit $g = f_1 - f_2$. Résoudre $f_1(x) = f_2(x)$ équivaut à résoudre $g(x) = 0$.

Comme $g(x) = \mathrm{e}^x + x - 2$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \mathrm{e}^x + 1$. La fonction exponentielle étant toujours positive, on a donc, pour tout réel x, $g'(x) > 0$. g est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $g(0) = -1$ et $g(1) = e - 1 > 0$. Comme $0 \in [-1\,;\,e-1]$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0\,;\,1]$.