Corrigé exercice 79

1. On commence par étudier les variations de f qui est définie sur $[-6;+\infty[$ et dérivable sur $]-6;+\infty[$. on a alors : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} > 0$ pour tout x appartenant à $]-6;+\infty[$. On obtient le tableau de variations suivant.

x	-6	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $+$	
f	$0 \nearrow$	$+\infty$

Ce tableau de variations restreint à $[0;3]$ devient :

x	0	3
$f'(x)$	$+$	
f	$\sqrt{6} \nearrow$	3

On en déduit que l'intervalle $[0;3]$ est stable par f.

Montrons par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 3.
Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6}$ donc on a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$.
La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

HR : Supposons qu'à rang k quelconque on ait $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$.
Hérédité : Partant de $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$. On applique alors la fonction f à cette inégalité. Il y a conservation de l'ordre puisque f est croissante sur $[0;3]$. On obtient donc $f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(3)$, c'est-à-dire $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 3$. Il y a donc hérédité.
Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire. Par principe de récurrence, la suite (u_n) est croissante et majorée par 3.

2. La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.
3. Cette suite converge donc vers un point fixe de f. Les solutions de $f(x) = x$ sont les solutions de l'équation $x^2 - x - 6 = 0$ qui appartiennent à $[0;3]$. Les solutions sont -2 et 3.
La suite (u_n) converge donc vers 3 puisque -2 n'appartient pas à $[0;3]$.

Corrigé exercice 80

1. Il s'agit de la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{5}$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = \frac{2x}{5}$, d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. L'équation $f(x) = x$ implique $\frac{x^2}{5} = x \Leftrightarrow x(x-5) = 0$. Les solutions de cette équation sont $x = 0$ et $x = 5$.
4. Prouvons par récurrence que (u_n) est décroissante et positive, c'est-à-dire que, pour tout n, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

   Initialisation : $u_0 = 4$ et $u_1 = 3{,}2$ donc on a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

   HR : supposons qu'au rang k on ait $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$.
   Hérédité La fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ et $f(0) = 0$. On a donc $f(0) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k)$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$. Il y a donc bien hérédité.

   Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 0$ et il y a hérédité. Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.
5. La suite est décroissante et minorée, elle est donc convergente.Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et que $f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$, la suite converge donc vers une solution de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire 0 ou 5 d'après la question 3. Comme la suite est décroissante, elle est majorée par son premier terme $u_0 = 4$. La suite ne peut donc pas converger vers 5. On en déduit qu'elle converge vers 0.