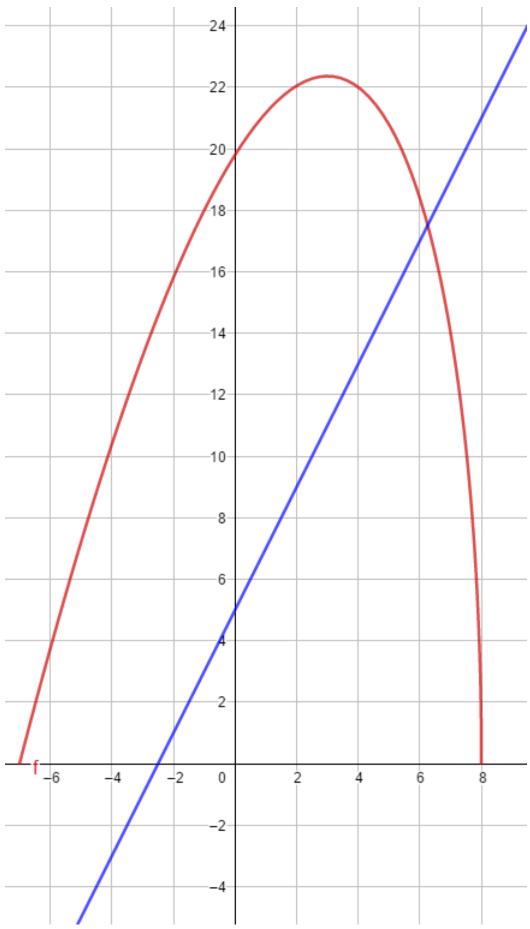
Corrigé exercice 53 :

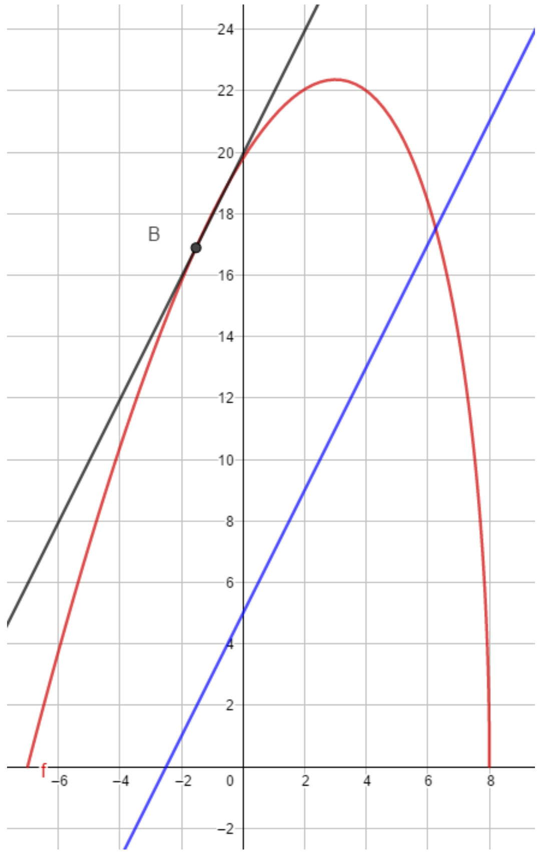
1. $g = v \circ u$ avec $u(x) = -x^3 - 6x^2 + 63x + 392$ et $v(x) = \sqrt{x}$ donc $g' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -3x^2 - 12x + 63$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc, pour tout $x \in]-7;8]$, $g'(x) = \dfrac{-3x^2 - 12x + 63}{2\sqrt{-x^3 - 6x^2 + 63x + 392}} = \dfrac{-3(x^2 + 4x - 21)}{2\sqrt{-x^3 - 6x^2 + 63x + 392}}$.
2. $2\sqrt{-x^3 - 6x^2 + 63x + 392} > 0$ pour tout $x \in]-7;8]$ donc $g'(x)$ est du signe de $-3(x^2 + 4x - 21)$. On calcule le discriminant de ce trinôme : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 100$. Ce trinôme admet un discriminant positif donc admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{100}}{2} = -7$ et $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{100}}{2} = 3$.
   Donc $g'(x)$ est négative sur $[3;8]$ et positive sur $]-7;3]$.

x	-7		3		8
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$10\sqrt{5}$	$\searrow$	0

3. (a) On obtient la courbe ci-dessous.



   (b) Graphiquement, on peut conjecturer que l'abscisse du point où la tangente est parallèle à d est environ -1.



4. (a) Une équation de la tangente en a est $y = g'(a)\times(x-a)+g(a)$, c'est-à-dire $y = \dfrac{-3(a^2+4a-21)}{2\sqrt{-a^3-6a^2+63a+39}}$
$a) + \sqrt{-a^3-6a^2+63a+392}$.

(b) On a, pour tout $a \in]-7;8[$:
$\sqrt{(-a+8)(a+7)^2} = \sqrt{(-a+8)(a^2+14a+49)}$
$= \sqrt{-a^3-14a^2-49a+8a^2+111a+392}$
$= \sqrt{-a^3-6a^2+63a+392} = g(a)$.
Et, pour tout $a \in]-7;8[$:
$-3(a+7)(a-3) = -3(a^2-3a+7a-21) = -3a^2-12a+63$.

(c) La tangente est parallèle à d si les coefficients directeurs de ces deux droites sont égaux donc si $\dfrac{-3(a^2+4a-21)}{2\sqrt{-a^3-6a^2+63a+392}} = 2$ avec $a \neq -7$ et $a \neq 8$ qui annulent le dénominateur.
Or $\dfrac{-3(a^2+4a-21)}{2\sqrt{-a^3-6a^2+63a+392}} = \dfrac{-3(a+7)(a-3)}{2\sqrt{(-a+8)(a+7)^2}}$, d'après la question précédente, d'où $\dfrac{-3(a^2+4a-21)}{2\sqrt{-a^3-6a^2+63a+392}} = \dfrac{-3(a-3)}{2\sqrt{(-a+8)}}$.
On cherche donc à résoudre l'équation $\dfrac{-3(a-3)}{2\sqrt{-a+8}} = 2$ c'est-à-dire $-3a+9 = 4\sqrt{-a+8}$ et donc $(-3a+9)^2 = 16(-a+8)$ ce qu'on peut réécrire $9a^2-38a-47=0$.
Ce trinôme du second degré a pour discriminant$\Delta = (-38)^2 - 4\times 9\times(-47) = 3136 > 0$ donc il admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{38+\sqrt{3136}}{18} = \dfrac{47}{9}$ et $x_2 = \dfrac{38-\sqrt{3136}}{18} = -1$.
On teste les solutions obtenues : $f'\left(\dfrac{47}{9}\right) = -2$ donc $\dfrac{47}{9}$ n'est pas solution de l'équation que l'on cherchait à résoudre, mais on a bien $f'(-1) = 2$, on en déduit que la tangente à la courbe représentative de f est parallèle à d en $x=-1$.