Chapitre 5- Combinatoire et dénombrement

Terminales - Spécialité Maths

1 Cardinal d'ensembles

Définition 1.1.

1. Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'éléments de E. On le note $card(E)$.
2. Si E_1,E_2,E_3,...E_p sont p ensembles finis deux à deux disjoints alors :
   $card(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_p) = card(E_1) + card(E_2) + ... + card(E_p)$
3. on appelle couple, triplet, p-uplet une collection respectivement de deux objets, de trois objets, de p-uplets.

1.1 Produit cartésien

Définition 1.2.
Soient A et B deux ensembles non vides. Le produit cartésien de A et B est l'ensemble noté $A \times B$ constitué des couples (x,y) où x est un élément de A et y un élément de B.
$A \times B = \{(x,y), x \in A, y \in B\}$

Exemple :

Si $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$ alors $E \times F = \{(a,1); (a,2); (b,1); (b,2); (c,1); (c,2)\}$

$\{b; a; c; c; a\}$ est un 5-uplet d'éléments de E. $\{b; a; c; c; a\} \in E^5$

$E \times E = \{(a,a); (a,b); (a,c); (b,a); (b,b); (b,c); (c,a); (c,b); (c,c)\}$

1.2 Principe multiplicatif

Propriété 1.1.

1. Si E_1,E_2,E_3,...E_p sont p ensembles finis alors :
   $$card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) ... \times card(E_p)$$
2. Si E est un ensemble de cardinal n et si $k \in \mathbb{N}^*$ alors $card(E^k) = n^k$

Reprenons les ensembles E et F de l'exemple précédent :
$card(E \times F) = card(E) \times card(F) = 3 \times 2 = 6$
$card(E \times E) = card(E)^2 = 9$
$card(E^5) = 3^5 = 243$ c'est le nombre de 5-uplets d'éléments de E.

2 Arrangements et permutations

2.1 Arrangements d'un ensemble

Définition 2.1.
Soit n un entier naturel non nul. On appelle factorielle de n le nombre :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1$$

Définition 2.2.
Soit A un ensemble non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

Un arrangement de k éléments de A (ou k-arrangement) est un k-uplet d'éléments **distincts** de A.

Exemple :

Soit $A = \{b; j; n; o; r; u\}$ alors (j,o,n) et (r,u,j) sont des arrangements de 3 élément de A. (b,j,n,o,j) n'est pas un arrangement de A car l'élément j est répété.

Propriété 2.1.
Le nombre de k-arrangements de A est donné par la formule :

$$\mathcal{A}_n^k = n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Démonstration. Pour construire un k-uplet d'éléments distincts de A, on choisit le 1$^{\text{er}}$ élément parmi n élément de A. Le deuxième est choisi parmi $n-1$ éléments de A..., le k$^{\text{ième}}$ est choisi parmi $n-k+1$.
Ainsi, le nombre d'arrangements est $n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ CQFD

Définition 2.3.
Soit A un ensemble fini non vide à n éléments. Une permutation de A est le n-uplet d'éléments distincts de A.

Propriété 2.2.
Le nombre de permutation d'un ensemble fini non vide à n éléments est $n!$

Exemple :

Si $A = \{a; b; c\}$

$(a,b,c),(b,c,a),(c,a,b),(b,a,c),(a,c,b),(c,b,a)$ sont les 6 permutations de A.

3 Combinaisons d'un ensemble fini

3.1 Parties d'un ensemble fini

Définition 3.1.
Une partie d'un ensemble A est un sous-ensemble de A. On la note $\mathcal{P}(A)$

Propriété 3.1.
Le nombre de parties de A est égale à 2^n.

3.2 Nombre de combinaisons

Définition 3.2.
Soit A une ensemble fini à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n Une combinaison de k éléments de A est une partie de A de cardinal k.

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$

Propriété 3.2.
Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$. Alors :

1. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
2. Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. Relation de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Démonstration. Relation de Pascal :
$(k+1)! = (k+1) \times k!$ et $(n-k)! = (n-k) \times (n-k-1)!$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$
Le dénominateur commun est $(k+1)!(n-k)!$
On a

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

CQFD

Propriété 3.3.
n entier naturel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier $k \leqslant n$, on note A_n l'ensemble des parties de A composées de k éléments.

$Card(A_k) = \binom{n}{k}$
Les A_k sont deux à deux disjoints et leur réunions est $\mathcal{P}(A)$
On a : $2^n = Card(\mathcal{P}(A)) = Card(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Card(A_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

CQFD

3.3 Triangle de Pascal

Propriété 3.4 (Triangle Pascal).
Pour $0 \leqslant k \leqslant n$ on peut construire le tableau suivant :

n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6
				k			

Le nombre $\binom{n}{k}$ est donné par ce triangle. Par exemple $\binom{5}{3} = 10$

Propriété 3.5 (Formule du binôme).

Pour tous nombres complexes u et v et pour n entier naturel, on a

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$$

Démonstration. **Initialisation** : pour $n = 1$ on a $u + v$ d'une part et
$\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k = \binom{1}{0} u^1 * v^0 + \binom{1}{1} u^0 * v^1 = u+v$ d'autre part. Donc, la propriété est vraie pour $n = 1$.
HR :On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n > 1$ (pour alléger l'écriture et éviter les confusions, je garde le n et ne choisis pas de k qui est le compteur de la somme).

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$$

Donc on veut montrer que

$$(u+v)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{n+1-k} v^k$$

Or
$(u+v)^{n+1} = (u+v)(u+v)^n = (u+v)(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k+1} v^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^{k+1}$
On voit que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^{n-k+1} v^k = (\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} u^{n-k+1} v^k) + v^{n+1}$ (remplacez k par 0 et k par 1 dans les sommes pour voir l'égalité puis remplacez k par n et k par $n+1$ pour voir l'égalité.)

D'autre part $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k+1}v^k = (\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k+1}v^k) + u^{n+1}$

Donc $\displaystyle(u+v)^{n+1} = (\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k+1}v^k) + u^{n+1} + (\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}u^{n-k+1}v^k) + v^{n+1} =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k})u^{n-k+1}v^k + (u^{n+1} + v^{n+1})$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{n}(\binom{n+1}{k})u^{n-k+1}v^k + (u^{n+1} + v^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1}(\binom{n+1}{k})u^{n-k+1}v^k$

On a montré l'hérédité, la propriété est vraie pour tout n. CQFD