Corrigé exercice 68 :

1. Si A ou B est vide, leur cardinal vaut 0 et le produit $A \times B$ est égalements vide, de cardinal 0 également. La formule reste valable.
2. (a) Les éléments de A_i sont les couples $(a_k; b_i)$ pour k allant de 1 à n. Il y a donc n éléments dans chaque A_i.
   (b) Les ensembles A_i sont deux à deux disjoints. En effet, le deuxième élément d'un couple diffère d'un ensemble A_i à un autre.
   (c) L'union des A_i pour i allant de 1 à p est $A \times B$.
   (d) Cette union est disjointe, on a$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A_1) + \ldots + \text{Card}(A_p) = n + \ldots + n = np$

Corrigé exercice 69 :

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{P}_n$ la proposition $\text{Card}(A^n) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^n$.

— Initialisation : $\mathcal{P}_1$ est vraie. En effet $A^1 = A$ et $\text{Card}(A) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^1$.

— Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel non nul k pour lequel $\mathcal{P}_k$ est vraie.
On assimile alors A^{k+1} à $A^k \times A$. Cette association se faisant de manière univoque, on a alors $\text{Card}(A^{k+1}) = \text{Card}(A^k \times A)$. Ainsi, $\text{Card}(A^{k+1}) = \text{Card}(A^k \times A) = \text{Card}(A^k) \times \text{Card}(A) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^k \times \text{Card}(A)$ par hypothèse de récurrence.
Finalement, on a $\text{Card}(A^{k+1}) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^{k+1}$. La proposition $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie $\text{Card}(A^{k+1}) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^{k+1}$.

— Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a bien $\text{Card}(A^n) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^n$