Corrigé exercice 93 :

1. On rappelle que $0! = 1$. Ainsi, $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$. Le seul sous-ensemble à 0 élément d'un ensemble à n éléments est l'ensemble vide $\varnothing$.
2. $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$.
3. Puisque pour tout entier $k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on a alors $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

Corrigé exercice 95 :

1. $\binom{10}{1} = 10$, $\binom{48}{47} = 48$, $\binom{55}{0} = 1$, $\binom{64}{63} = 64$, $\binom{51}{50} = 51$.
2. $\binom{20}{2} = \dfrac{20 \times 19}{2} = 190$, $\binom{30}{29} = 30$, $\binom{50}{1} = 50$, $\binom{12}{2} = \dfrac{12 \times 11}{2} = 66$, $\binom{14}{14} = 1$.
3. $\binom{6}{3} = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$, $\binom{8}{4} = \dfrac{8!}{4!4!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$,
   $\binom{10}{4} = \dfrac{10!}{4!6!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$, $\binom{10}{5} = \dfrac{10!}{5!5!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$.
   Enfin, d'après la relation de Pascal, $\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5}$.
   Ainsi, $\binom{11}{5} = 210 + 252 = 462$.
4. $\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5} = 0$ car $\binom{5}{0} = \binom{5}{5}$, $\binom{5}{1} = \binom{5}{4}$ et $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

Corrigé exercice 97 :

Note : pour cet exercice, on précise que si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

1. L'entier 0 est solution de l'équation $\binom{n}{3} = n$. 1 et 2 ne le sont pas. Soit maintenant n un entier supérieur ou égal à 3.
   $\binom{n}{3} = n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = n \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = n \Leftrightarrow \dfrac{n(n^2-3n-4)}{6} = 0$
   n étant supérieur ou égal à 3, cela revient à résoudre $n^2 - 3n - 4 = 0$. L'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$, d'inconnue réelle x, possède deux solutions : $x = -1$ et $x = 4$. De fait, l'unique solution entière supérieur ou égale à 3 de l'équation $n^2 - 3n - 4 = 0$ est 4. Les solutions de l'équation $\binom{n}{3} = n$ sont donc 0 et 4.
2. Les entiers 0 et 1 sont solutions de l'équation $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$. 2 ne l'est pas puisque $\binom{2}{2} = 1$ et $\binom{2}{3} = 0$. Soit maintenant n un entier supérieur ou égal à 3.
   $\binom{n}{2} = \binom{n}{3} \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow n(n-1)\dfrac{5-n}{6} = 0$,

ce qui revient à $5-n=0$, n étant supérieur ou égal à 3. L'unique solution dans ce cas est $n=5$.
Les solutions de l'équation $\binom{n}{2}=\binom{n}{3}$ sont donc 0, 1 et 5.

3. Si $n=0$ ou $n=1$, l'égalité est vérifiée. Pour $n=2$, elle ne l'est pas. Supposons maintenant $n \geq 3$.
$2\binom{n}{2}=3\binom{n}{3} \iff n(n-1)=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2} \iff n(n-1)\dfrac{4-n}{2}=0 \iff 4-n=0 \iff n=4$
Les solutions sont donc 0, 1 et 4.