Chapitre 6- Vecteurs, Droites et Plans de l'espace

Terminale Spé Maths

1 Caractérisation vectorielle

Les définitions et les calculs sur les vecteurs du plan se généralisent à l'espace.
Les règles de calcul, y compris la relation de Chasles, sont les mêmes qu'avec les vecteurs du plan.

Propriété 1.1.

1. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\vec{v} = k\vec{u}$ où k est un réel.
   Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
2. Les points A,B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.
3. Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.

1.1 Caractérisation vectorielle d'une droite

A,B sont deux points de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M définis par :

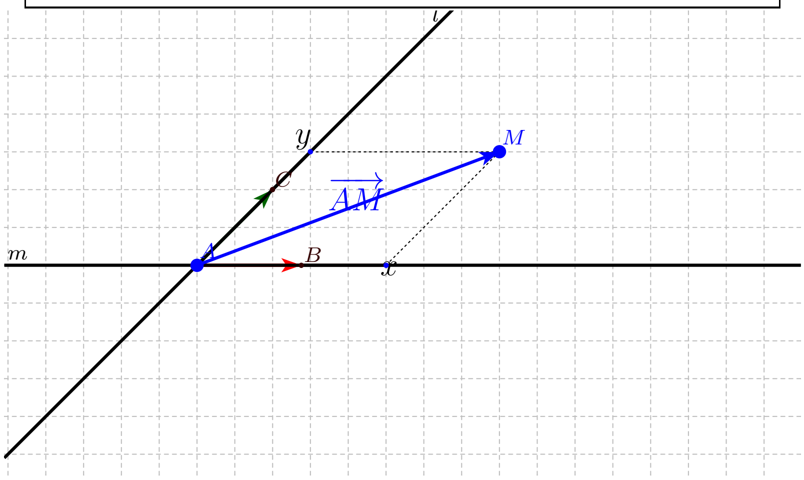
$$\boxed{\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}, x \text{ étant un réel quelconque}}$$

Remarque : tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1.2 Caractérisation vectorielle d'un plan

A,B et C sont 3 points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M définis par :

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, x \text{ et } y \text{ étant des réels quelconques}}$$



Démonstration. Puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires,$(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan et donc si M est dans ce plan, il existe x et y tels que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Réciproquement, soit x et y deux réels et M le point défini par : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Comme $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC), il existe dans ce plan un point N tel que :
$\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ et $M = N$, M est bien dans le plan (ABC).
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC)

CQFD

Conséquences

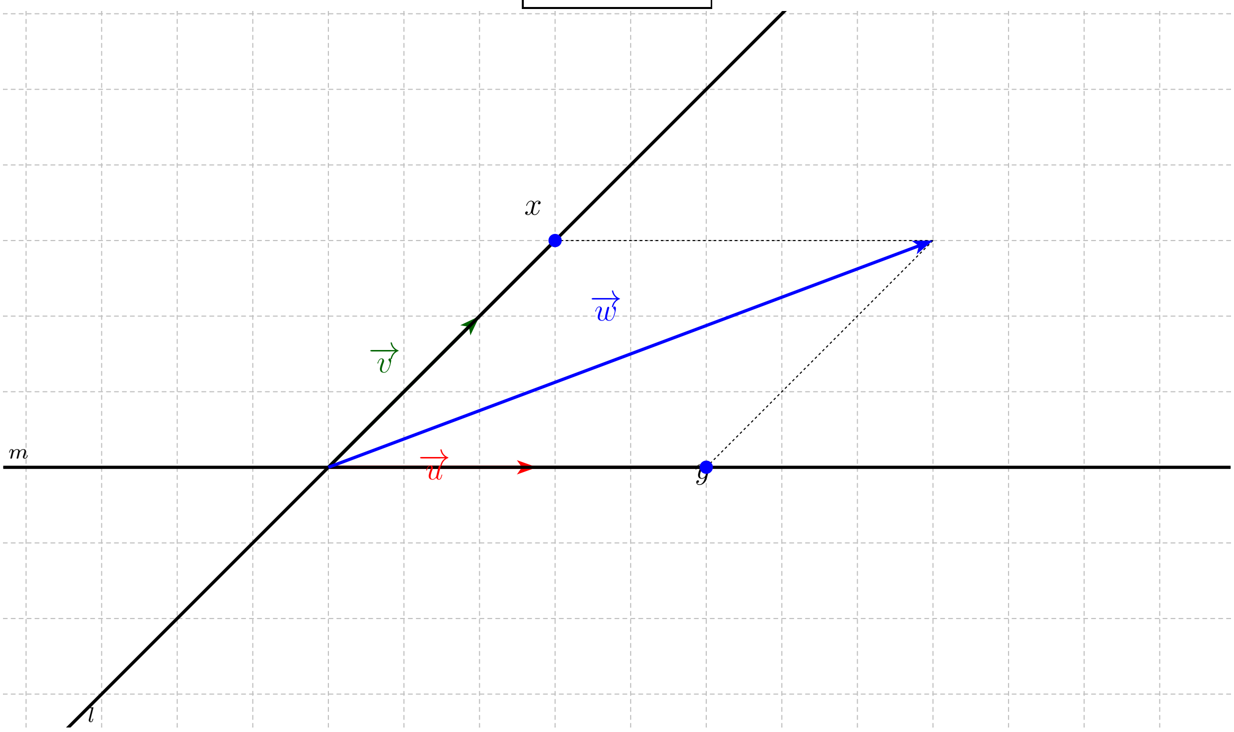
1. Deux droites sont parallèles si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
2. Deux plans ayant même couple de vecteurs directeurs sont parallèles.
3. Une droite D et un plan P sont parallèles si, et seulement si, un vecteur directeur de D est un vecteur du plan P.

1.3 Définition de vecteurs coplanaires

On dit que trois vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont **coplanaires** s'il existe 4 points A,B,C et D appartenant à un même plan et tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$,$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Propriété 1.2.
Soit $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si, il existe deux réels x et y tels que :

$$\boxed{\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}}$$



Démonstration. Soit A,B,C et D des points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$,$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non colinéaires, les points A,B et C définissent un plan dont $(A;\vec{u},\vec{v})$ est un repère.

$\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à D appartient au plan (ABC). D'après la caractérisation vectorielle d'un plan, il existe deux réels x et y tels que : $\overrightarrow{AD} = x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$ CQFD

Repère dans l'espace

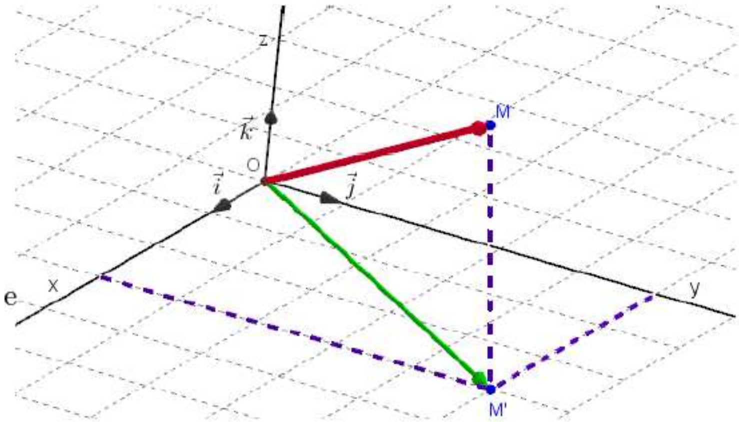
Choisir un repère de l'espace, c'est donner un point O et un triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de vecteurs non coplanaires. On note $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le repère.

Définition 1.1.
Soit $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On dit que les vecteurs sont linéairement indépendants lorsqu'ils ne sont pas coplanaires. C'est à dire qu'il existe 3 réels a,b,c tels que si $a.\vec{u}+b.\vec{v}+c\vec{w}=0 \Rightarrow a=b=c=0$. Dans ce cas, $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forment une **base** de l'espace.

Coordonnées

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace. Pour tout point M il existe un unique triplet $(x;y;z)$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}$$



Démonstration. $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ étant non coplanaires, le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ et la droite Δ passant par M et de vecteur directeur $\vec{k}$ sont sécants. Soit M' leur point d'intersection.

Comme M' est un point du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ il existe deux nombres x et y tels que : $\overrightarrow{OM'}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Les vecteurs $\overrightarrow{M'M}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, il existe donc un nombre z tel que $\overrightarrow{M'M}=z\vec{k}$.
D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}$ donc : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$
On admet l'unicité de cette écriture.

$(x;y;z)$ sont les coordonnées de M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z la cote de M

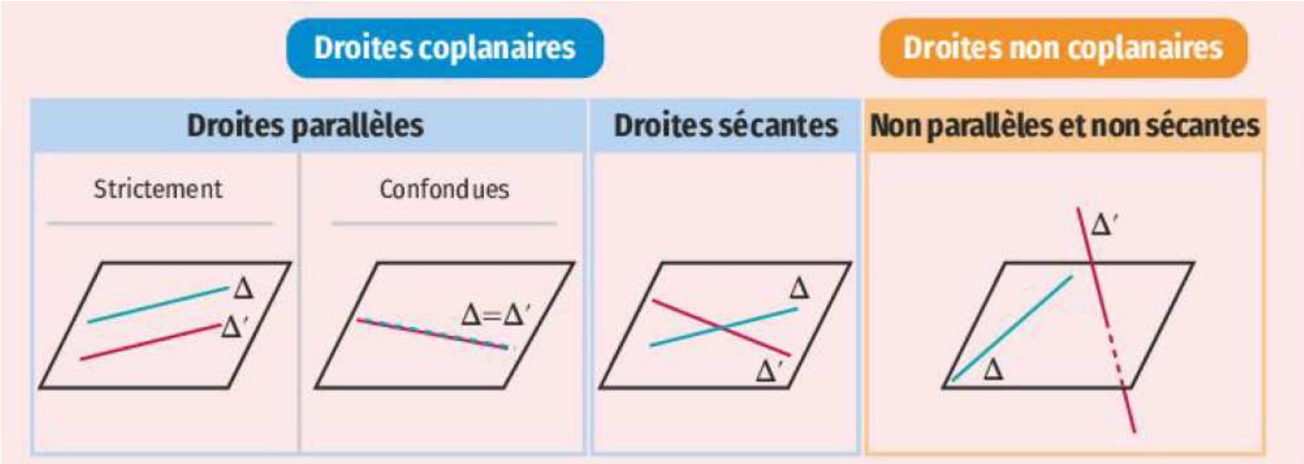
CQFD

Définition 1.2.
$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère. Au vecteur $\vec{u}$ on associe le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. Par définition , les coordonnées de $\vec{u}$ sont les coordonnées $(x;y;z)$ de M.
Donc : $\vec{u}$ s'écrit de manière unique : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

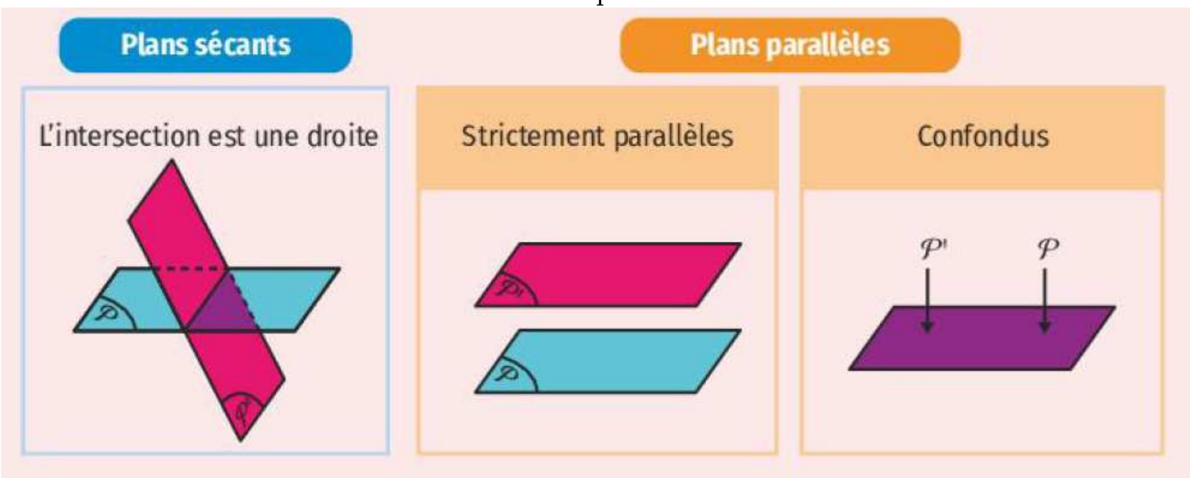
Définition 1.3.
Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace et I,J et K les points tels que : $\overrightarrow{OI}=\vec{i},\overrightarrow{OJ}=\vec{j},\overrightarrow{OK}=\vec{k}$. Ce repère est **orthonormé** lorsque les droites (OI),(OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires et $OI=OJ=OK=1$

2 Droites et plans de l'espace

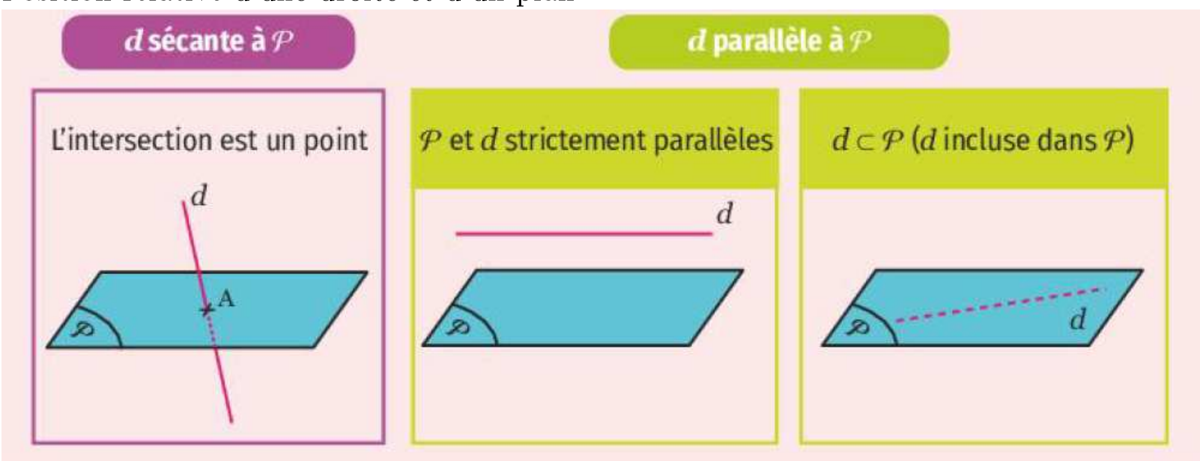
Définition 2.1.
Dans l'espace, deux droites peuvent être coplanaires ou non. Si elles sont coplanaires, elle peuvent être sécantes ou parallèles



Définition 2.2. • Position relative de deux plans

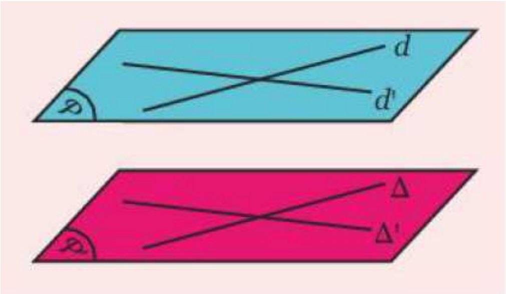


• Position relative d'une droite et d'un plan

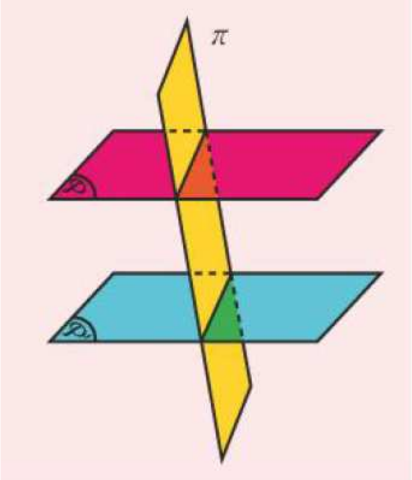


Théorème 2.1.
Parallélisme dans l'espace :

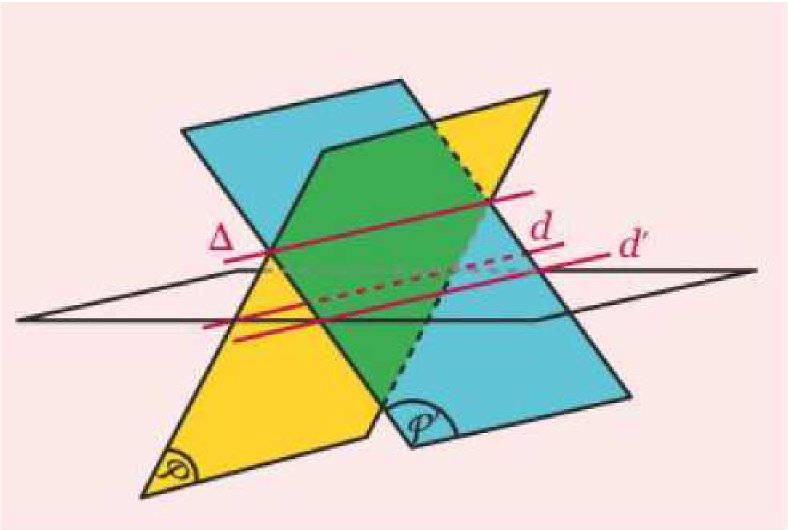
- Une droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si, il existe une droite Δ du plan $\mathcal{P}$ parallèle à d.
- Un plan $\mathcal{P}'$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe deux droites sécantes de $\mathcal{P}$ parallèles à deux droites sécantes de $\mathcal{P}'$



- Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans strictement parallèles. Tout plan coupant $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{P}'$ et les deux droites d'intersection sont parallèles.



Théorème 2.2.
Théorème du toit Soient deux droites d et d' parallèles. Soie un plan $\mathcal{P}$ contenant d sécant à un autre plan $\mathcal{P}'$ contenant d'. Alors la droite Δ intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est parallèle à d et d'.



EXERCICE 1
vecteurs coplanaires

EXERCICE 2
Combinaisons linéaires de vecteurs- Y.MONKA - Exprimer une décomposition de vecteurs

Propriété 2.1.
Dans un repère quelconque $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **ont pour coordonnées** $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$
A **et** B **ont pour coordonnées** $(x_A;y_A;z_A)$ et $(x_B;y_B;z_B)$

1. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$
2. Pour tout réel k, $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky;kz)$ $\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$
3. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$
4. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$
5. Si, de plus, le repère est **orthonormé** alors :
$\parallel \vec{u} \parallel = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $AB = \parallel \overrightarrow{AB} \parallel = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$.
On obtient donc le système :

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt, t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ct \end{cases}}$$

Ce système est appelé **représentation paramétrique de la droite** $\mathcal{D}$