Corrigé exercice 45 :

$2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k} + 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} = \overrightarrow{w}$
Les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas linéairement indépendants, ils ne forment donc pas une base.

Corrigé exercice 50 :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existes deux réels simultanément non nuls λ et μ tels que $\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2}$.
   $\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ -3\lambda = -1 \\ 2\lambda + \mu = 2 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 - \lambda = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = 2 - 2\lambda = 2 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$
   Le système n'est pas compatible. Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existes deux réels simultanément non nuls λ et μ tels que $\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2}$.
   $\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 6\mu = 1 & (1) \\ -6\lambda - 3\mu = 3 & (2) \\ -\lambda + 16\mu = 5 & (3) \end{cases}$
   On résout le système formé de la première et la troisième équation.
   $\begin{cases} \lambda + 6\mu = 1 & (1) \\ -\lambda + 16\mu = 5 & (3) \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 6\mu = 1 & (1) \\ 22\mu = 6 & (1) + (3) \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - 6\mu = 1 - 6 \times \frac{3}{11} = -\frac{7}{11} \\ \mu = \frac{3}{11} \end{cases}$
   On vérifie la compatibilité de ces valeurs avec la deuxième équation du système initial : $-6 \times (-\frac{7}{11}) - 3 \times \frac{3}{11} = 3$. L'égalité (2) est bien respectée.
   On a donc $\overrightarrow{e_3} = -\frac{7}{11}\overrightarrow{e_1} + \frac{3}{11}\overrightarrow{e_2}$. Les trois vecteurs sont donc coplanaires.