Corrigé exercice 82 :

1. La droite d admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

   La droite d' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

   $\frac{-2}{1} \neq \frac{-3}{2}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires.
   Les droites d et d' ne sont pas parallèles.
   Si les droites sont sécantes, les coordonnées $(x; y; z)$ du point d'intersection vérifient :
   $$\begin{cases} x = -2t + 3 = t' - 1 & (1) \\ y = -3t + 1 = 2t' + 2 & (2) \\ z = t + 2 = -t' - 3 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + t' = 4 & (1) \\ 3t + 2t' = -1 & (2) \\ t + t' = -5 & (3) \end{cases}$$
   On résout le système composé des équations (1) et (3).
   $$\begin{cases} 2t + t' = 4 & (1) \\ t + t' = -5 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 & (1) - (3) \\ t + t' = -5 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t' = -14 \end{cases}$$
   On vérifie la compatibilité de ces deux valeurs avec l'équation (2) du système initial :
   $-3t + 2t' = 3 \times 9 + 2 \times (-14) = -1$.
   Le système admet comme solution $(t; t') = (9; -14)$
   En remplaçant t par 9 dans la représentation paramétrique de la droite d de l'énoncé, on trouve :
   $$\begin{cases} x = -2 \times 9 + 3 = -15 \\ y = -3 \times 9 + 1 = -26 \\ z = 9 + 2 = 11 \end{cases}.$$
   Si l'on avait remplacé t' par -14 dans la représentation paramétrique de la droite d' de l'énoncé, on aurait trouvé les mêmes valeurs.
   Conclusion : les droites d et d' sont coplanaires, sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées $(15; -26; 11)$.

2. La droite d admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

   La droite d' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

   $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-2}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires. Les droites d et d' ne sont pas parallèles.
   Si les droites sont sécantes, les coordonnées $(x; y; z)$ du point d'intersection vérifient :
   $$\begin{cases} x = t - 1 = 3t' \\ y = 2t + 2 = -2t' + 1 \\ z = -t - 3 = t' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3t' + 1 \\ 2(1 + 3t') + 2 = -2t' + 1 \\ -(3t' + 1) - 3 = t' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3t' + 1 \\ t' = -\frac{3}{8} \\ t' = -\frac{5}{4} \end{cases}$$
   Ce système n'est pas compatible. Les droites d et d' ne sont pas sécantes.
   d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes. Elles ne sont donc pas coplanaires.

3. La droite d admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$.

   La droite d' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}3\\-\frac{9}{2}\\9\end{pmatrix}$.

On constate que $\overrightarrow{u'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{u}$. Les droites d et d' sont parallèles.
La droite d contient le point $A(7;1;2)$. $A \in d'$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} 3t' - 1 = 7 \\ -\frac{9}{2}t' = 1 \\ 9t' + 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{8}{3} \\ t' = -\frac{2}{9} \\ t' = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ce système n'est pas compatible d'où $A \notin d'$. Les droites d et d' sont strictement parallèles.

Corrigé exercice 83 :

1. Ce système est la représentation graphique d'une droite d contenant le point $A(-4;1;4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   Ici, $t \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire $t \geqslant 0$.
   Avec $t = 0$, $\begin{cases} x = 2 \times 0 - 4 = -4 \\ y = 0 + 1 = 1 \\ z = -3 \times 0 + 4 = 4 \end{cases}$.
   Avec $t = 1$, $\begin{cases} x = 2 \times 1 - 4 = -2 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = -3 \times 1 + 4 = 1 \end{cases}$.
   L'ensemble cherché est la demi-droite d'origine A contenant le point $B(-2;2;1)$.
2. Ce système est la représentation graphique d'une droite d passant par $A(-3;2;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Ici, $t \in [-2\,;3]$.
   Avec $t = -2$, $\begin{cases} x = -2 - 3 = -5 \\ y = 3 \times (-2) + 2 = -4 \\ z = -2 + 1 = -1 \end{cases}$.
   Avec $t = 3$, $\begin{cases} x = 3 - 3 = 0 \\ y = 3 \times 3 + 2 = 11 \\ z = 3 + 1 = 4 \end{cases}$.
   L'ensemble cherché est le segment $[BC]$ avec $B(-5;-4;-1)$ et $C(0;11;4)$.
   Remarque : $A \in [BC]$ car les coordonnées de A s'obtiennent en choisissant $t = 0$ et $0 \in [-2;3]$.

Corrigé exercice 84 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $A(1;-1;3) \in (AB)$.
   Une représentation graphique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 1 \\ z = 1t + 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
2. d est parallèle à (AB) donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d. $E(-5;7;1) \in d$.

Une représentation graphique de la droite d est $\begin{cases} x = 2t' - 5 \\ y = 3t' + 7 \\ z = 1t' + 1 \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

3. (a) On détermine les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\frac{-2}{2} \neq \frac{14}{3}$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites (AF) et d ne sont donc pas parallèles. Elles sont sécantes ou non coplanaires.

(b) Une représentation graphique de la droite (AF) est $\begin{cases} x = -2t'' + 1 \\ y = 14t'' - 1 \\ z = 3 \end{cases}$ $(t'' \in \mathbb{R})$.

$M(x; y; z)$ est le point d'intersection des droites (AF) et d si, et seulement si,

$$\begin{cases} x = -2t'' + 1 = 2t' - 5 \\ y = 14t'' - 1 = 3t' + 7 \\ z = 3 = t' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t'' + 1 = 2 \times 2 - 5 \\ y = 14t'' - 1 = 3 \times 2 + 7 \\ t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'' = 1 \\ t'' = 1 \\ t' = 2 \end{cases}$$

Ce système admet pour solution $(t'; t'') = (2; 1)$. Les deux droites sont sécantes.

En remplaçant t' par 2 dans le système de représentation paramétrique de la droite d, on trouve :

$$\begin{cases} x = 2 \times 2 - 5 = -1 \\ y = 3 \times 2 + 7 = 13 \\ z = 2 + 1 = 3 \end{cases}.$$

Conclusion : les droites d et (AF) sont coplanaires, sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées $(-1; 13; 3)$. Elles se coupent donc en F.