Chapitre 7 - Loi binomiale

Terminales Spé maths

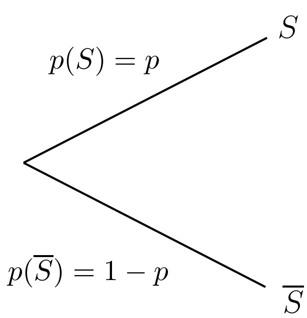
Table des matières

1 Histoire

D'après le livre scolaire
Jacques et Jean Bernoulli sont les premiers d'une longue lignée de mathématiciens suisses très brillants dont les recherches ont émaillé tout le XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. C'est notamment grâce à ces deux frères, que séparait pourtant une violente querelle, que le calcul différentiel de Leibniz a connu un tel succès. On doit à Jacques le nombreux travaux d'analyse (équations différentielles, convergence de séries infinies, première approche du nombre e comme limite d'une suite...) ainsi qu'en géométrie et surtout en théorie des probabilités.
En 1713, on publiera, à titre posthume, son œuvre probabiliste *Ars Conjectandi* qui reprend et commente les résultats de Huygens et qui œuvre aux calculs de la loi binomiale. Le résultat le plus important de ce livre légitime l'approche de la notion de probabilité par l'observation des fréquences. Premier exemple de théorème limite en probabilités, il permet aujourd'hui de valider le principe de l'échantillonnage en reliant fréquence et probabilité. Pour Bernoulli, ce résultat dépendant d'un projet philosophique beaucoup plus général, qui était de fonder, par le calcul, l'art de guider nos jugements dans les circonstances individuelles ou collectives où une décision est nécessaire.

2 Epreuve de Bernoulli- Schéma de Bernoulli

Définition 2.1.
Soit p un réel appartenant à $[0\,;1]$ Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant deux issues : S(Succès) et $\bar{S}$(Echec).
On note $p(S) = p$ et $p(\bar{S}) = 1 - p = q$.



Définition 2.2.
On réalise une épreuve de Bernoulli dont le succès S a pour probabilité p. Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Autrement dit, on a $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$
On décrit une loi de probabilité par le tableau suivant :

x_i	1	0
$p(X = x_i)$	p	$1 - p$

Propriété 2.1.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p. L'espérance mathématique de X est $E(X) = p$. La variance de X est $V(X) = p(1-p)$

Définition 2.3.
Soit n un nombre entier naturel non nul. Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**

3 Loi Binomiale

Définition 3.1.
Soit n un nombre entier naturel non nul et p un réel appartenant à $[0\,;1]$. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli à n épreuves ; p désignent la probabilité d'un succès à chaque épreuve. Alors X suit la loi binomiale de paramètres n et p. On note $X \backsim \mathcal{B}(n,p)$

Propriété 3.1.
On considère $X \backsim \mathcal{B}(n,p)$ Soient n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.
On appelle **coefficient binomial** le nombre de chemin de l'arbre pondéré conduisant à k succès parmi les n épreuves. On le note : $\binom{n}{k}$ La loi de probabilité de X est :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

4 Espérance et variance de la loi binomiale

On considère la variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On admettra que : l'espérance de X est $E(x) = np$ et que la variance de X est $V(x) = np(1-p)$ et son écart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

5 Introduction à l'échantillonnage

Propriété 5.1.
Soit n un entier naturel non nul, α et p deux nombres réels appartenant à $[0\,;1]$, X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. Il existe un intervalle I non vide tel que $P(X \in I) \geq 1-\alpha$.