Corrigé exercice 29 :

1. Deux arêtes successives d'un cube sont perpendiculaires.
   On en déduit que $(AB)\perp(AD)$, et donc que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.
2. Le quadrilatère $EFGH$ est un carré. Ses diagonales sont donc perpendiculaires, ce qui donne $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{FH}=0$.
3. Les droites (AE) et (FA) sont coplanaires et non perpendiculaires. Le produit scalaire considéré n'est donc pas nul.
4. Le quadrilatère $CGEA$ est un rectangle non carré. Ses diagonales ne sont donc pas perpendiculaires et le produit scalaire considéré n'est donc pas nul.

Corrigé exercice 28 :

1. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AD}^2$ par projection orthogonale du point L sur la droite (AD). Donc $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AL}=16$.
   De plus, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AL}=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\left\|\overrightarrow{AL}\right\|\cos(\alpha)=4\times2\sqrt{5}\times\cos(\alpha)=16$ où α désigne l'angle formé par les vecteurs considérés. On obtient $\alpha\approx26{,}56$ degrés.
2. On remarque que $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{JH}=-\overrightarrow{JE}\cdot\overrightarrow{JH}$. Puis, par projection orthogonale de H sur (JE), on obtient $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{JH}=-\overrightarrow{JE}^2=-2^2=-4$. On obtient $\alpha\approx116{,}56$ degrés.
3. On a $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CF}=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF})$. Comme $(CB)\perp(BF)$, $(BA)\perp(CB)$ et $(BA)\perp(BF)$ on a donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CF}=CB^2=16$. On obtient $\alpha=60$ degrés.
   Remarque : Ce résultat était prévisible car ACF est un triangle équilatéral.
4. $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EL}=EK^2$ par projection orthogonale de L sur (EK). Dans le triangle EHK rectangle en H, on a, d'après le théorème de Pythagore, $EK^2=2^2+4^2$, donc $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EL}=20$.
   $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EL}=EK\times EL\times\cos(\alpha)=20$.
   Dans le triangle ELK rectangle en K. $EL^2=EK^2+KL^2=20+16=36$
   $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EL}=\sqrt{20}\times6\times\cos(\alpha)=20\Leftrightarrow\cos(\alpha)=\dfrac{20}{6\sqrt{20}}$
   On obtient $\alpha\approx41{,}81$ degrés.

Corrigé exercice 27 :

Le triangle AIB est rectangle en I car la médiane d'un triangle équilatéral est aussi une hauteur. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2=AI^2+IB^2$ donc $AI^2=a^2-\left(\dfrac{1}{2}a\right)^2$, d'où $AI=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. Comme $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left[AI^2+AB^2-BI^2\right]$, on a alors $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{3}{4}a^2+a^2-\dfrac{1}{4}a^2\right]$ et donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{4}a^2$.
On obtient le même résultat en utilisant le projeté orthogonal.