Corrigé exercice 53 :

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$	$\|\overrightarrow{u}\|$	$\|\overrightarrow{v}\|$	$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|$	$\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|$
$\dfrac{3}{2}$	3	2	4	$\sqrt{10}$
5	2	3	$\sqrt{23}$	$\sqrt{3}$
8	3	4	$\sqrt{41}$	3

Corrigé exercice 54 :

1. On a $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HR} = \dfrac{1}{2}\left[HA^2 + HR^2 - AR^2\right] = \dfrac{1}{2}\left(3^2 + 2^2 - 4^2\right) = -\dfrac{3}{2}$.
2. $\cos\left(\widehat{RHA}\right) = \dfrac{-\dfrac{3}{2}}{3 \times 2} = -\dfrac{1}{4}$ donc $\widehat{RHA} \approx 104{,}5$ degrés.

Corrigé exercice 57 :

On a $BR = \dfrac{1}{2}a$ donc le théorème de Pythagore permet de démontrer que $BE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = BT$. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE}$ de deux façons différentes.
Première manière :
$\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BT} \cdot \left(\overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RE}\right) = \overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{RE}$
Or les triangles sont tous équilatéraux. Ainsi, $(BT) \perp (BR)$ et $\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{RE}$.
D'où $\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(\overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RT}\right) \cdot \overrightarrow{RE} = -\overrightarrow{RB} \cdot \overrightarrow{RE} + \overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{RE}$.
En utilisant les propriétés métriques dans le tétraèdre régulier, on obtient $\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE} = -\dfrac{1}{2}a^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + a^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{4}a^2$.
Deuxième manière :
$\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \times \cos(\alpha)$ donc $\dfrac{3}{4}a^2 \cos(\alpha) = \dfrac{1}{4}a^2$.
D'où $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{3}$ et $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 71°$.