

# Chap9- Logarithme népérien

Terminale Spécialité Mathématiques

## 1 Calculs algébriques

### 1. Remarque

La fonction exponentielle est une fonction continue et strictement croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $]0; +\infty[$ .  
Pour tout réel  $b$  de  $]0; +\infty[$ , il existe donc un unique réel  $a$  tel que  $e^a = b$

On dit que  $a$  est le **logarithme népérien** de  $b$  et on note :  $a = \ln(b)$ .

### 2. Définition

La fonction, définie sur  $]0; +\infty[$ , qui à  $x$  associe  $\ln(x)$  est appelée **fonction logarithme népérien**.

### 3. Remarques

D'après la définition :

(a)  $b > 0$  et  $a = \ln(b)$  équivaut à  $e^a = b$

(b) Pour tout réel  $x > 0$ ,  $\boxed{e^{\ln(x)} = x}$

(c) Pour tout réel  $x$ ,  $\boxed{\ln(e^x) = x}$

(d)  $\ln(1) = 0$  et  $\ln(e) = 1$

### 4. Propriétés algébriques de la fonction $\ln$

Pour tous réels  $a$  et  $b$  strictement positifs

(a)  $\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$

*Démonstration.*  $e^{\ln(a \times b)} = a \times b$  et  $e^{\ln(a) + \ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$   
donc :  $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln(a) + \ln(b)}$  et par conséquent :  $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

CQFD

(b)  $\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)}$

*Démonstration.*  $\ln(1) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$  donc :  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

CQFD

(c)  $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$

*Démonstration.*  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

CQFD

(d) Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\boxed{\ln(a^n) = n \ln(a)}$

*Démonstration.* Pour  $n \geq 0$  on fait une démonstration par récurrence.

Si  $n < 0$ , on pose  $p = -n$ . On a :  $\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^p}\right) = -\ln(a^p) = -p \ln(a) = n \ln(a)$

CQFD

(e)  $\boxed{\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln(a)}$

*Démonstration.*  $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2 \ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$  donc  $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

CQFD

## 2 Étude de la fonction logarithme népérien

- Propriété (admise) : La fonction **ln** est **continue** sur  $]0; +\infty[$
- La fonction **ln** est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ , on a :

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

*Démonstration.* On admet que la fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x > 0$  par  $f(x) = e^{\ln(x)} - x$

Par définition pour tout  $x > 0$ ,  $e^{\ln(x)} = x$  donc  $f$  est nulle sur  $]0; +\infty[$ . Donc sa dérivée est nulle également. Soit  $u$  la dérivée de  $\ln(x)$  alors par composition de fonctions  $f'(x) = u(x)e^{\ln(x)} - 1 = 0$  donc  $u(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$ .

CQFD

- La fonction **ln** est **strictement croissante** sur  $]0; +\infty[$

4.  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty}$

*Démonstration.* Soit  $A > 0$ . Peut-on déterminer un réel  $x_0$  tel que si  $x > x_0$ ,  $\ln(x) > A$  ?  
 $\ln(x) > A \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^A \Leftrightarrow x > e^A$ . Il suffit de prendre :  $x_0 = e^A$

CQFD

5.  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty}$

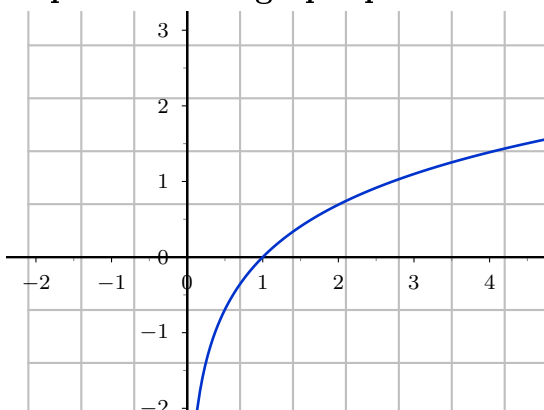
*Démonstration.*  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \text{et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{array} \right\}$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$  mais  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

CQFD

6. Tableau de variation de la fonction  $\ln$  :

$x$	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	+	
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

7. Représentation graphique



8. Remarque D'après ce qui précède, pour  $a$  et  $b$  réels strictement positifs :

(a)  $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$

(b)  $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$

9. Théorème des croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

cas particulier

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

Démonstration. ► ROC

1) Soit  $f$  définie par :  $f(x) = \sqrt{x} - \ln x, x \in I = ]0; +\infty[; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$ . On a le tableau de variation de  $f$  suivant :

$x$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	-		
$f(x)$	$2 - \ln 4 \approx 0,61$		

Sur  $I, f(x) > 0$ . Sur  $[1; +\infty[; \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{\ln x}{x} \geq 0$ .

D'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2) En posant  $y = \frac{1}{x}$  on a  $x \ln x = \frac{\ln(\frac{1}{y})}{y} = -\frac{\ln y}{y}$  avec  $y$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers 0.

D'après le 1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\ln y}{y} = 0$

CQFD

10. **Dérivée de la fonction composée**  $x \mapsto \ln(u(x))$

Soit  $u$  une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x$  de  $I$  :

$$\boxed{[\ln(u(x))]}' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$