∽ Baccalauréat S Liban 31 mai 2019 ∾

Durée : 4 heures

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par

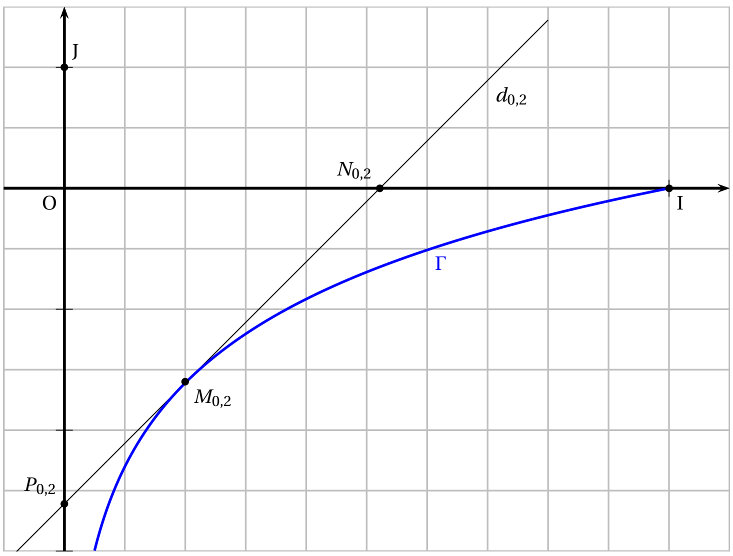
$$f(x) = x(1 - \ln x)^2.$$

a. Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in\ ]0\,;\,1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$.
Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.
On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0{,}2$ et on donne la figure ci-dessous.



a. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

b. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

c. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$.
Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.