EXERCICE 4 6 points Thème : Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme; Suites

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,1]$. On note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a :
   $$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x}$$
3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a $x\mathrm{e}^{-x} < 1$.
   En déduire le tableau de variation de f sur $]0\,;\,1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0\,;\,1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & \dfrac{1}{10} \\ b_0 & = & 1 \end{array}\right. \text{ et, pour tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-a_n} \end{array}\right.$$
   (a) Calculer a_1 et b_1. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.
   ```
   def termes (n) :
     a=1/10
     b=1
     for k in range(0,n) :
       c= ...
       b = ...
       a = c
     return(a,b)
   ```
   Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites (a_n) et (b_n).
2. On rappelle que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$$
   (b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n).
   On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,1]$, et que $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.
   (a) Démontrer que $f(A) = 0$.
   (b) Déterminer $A - B$.