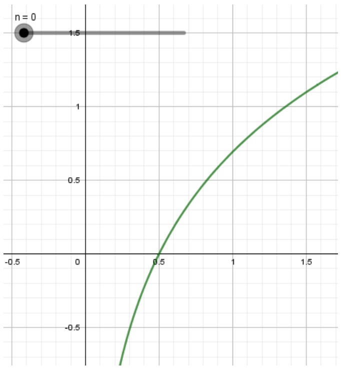
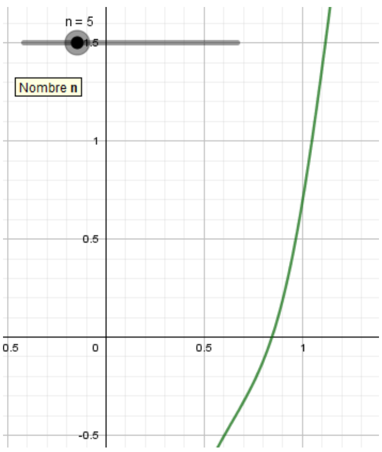
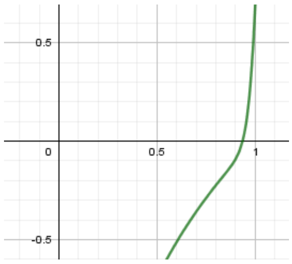
Corrigé exercice 104 :

1. Pour tout réel x, $x^{2n}+1>0$ donc $x^{2n+1}+x=x(x^{2n}+1)$ est du signe de x. Ainsi, $I_n=]0;+\infty[$.
2. g_n a le même sens de variation que $k_n\colon x\mapsto x^{2n+1}+x$ sur I_n. Or, $k_n'(x)=(2n+1)x^{2n}+1>0$ pour tout $x>0$. Ainsi, k_n est croissante et donc g_n est croissante sur I_n.
3. (a) g_n est continue sur I_n, strictement croissante sur I_n et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g_n(0{,}1)<0$ et $g_n(1)=\ln(2)>0$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires vu dans le chapitre 6, il existe un unique $\alpha_n\in I_n$ tel que $g_n(\alpha_n)=0$.
   (b) Voici un exemple d'utilisation de l'algorithme de dichotomie. Une valeur approchée de α_2 est 0,75.
4.

a	b	(a+b)/2	gn(a)	gn(b)	gn((a+b)/2)
0,1	1	0,55	-2,3024851	0,69314718	-0,51027838
0,55	1	0,775	-0,51027838	0,69314718	0,05314406
0,55	0,775	0,6625	-0,51027838	0,05314406	-0,23556648
0,6625	0,775	0,71875	-0,23556648	0,05314406	-0,09368673
0,71875	0,775	0,746875	-0,09368673	0,05314406	-0,02094087
0,746875	0,775	0,7609375	-0,02094087	0,05314406	0,01593019
0,746875	0,7609375	0,75390625	-0,02094087	0,01593019	-0,00254779
0,75390625	0,7609375	0,75742188	-0,00254779	0,01593019	0,00668053
0,75390625	0,75742188	0,75566406	-0,00254779	0,00668053	0,00206371
0,75390625	0,75566406	0,75478516	-0,00254779	0,00206371	-0,0002427
0,75478516	0,75566406	0,75522461	-0,0002427	0,00206371	0,00091034
0,75478516	0,75522461	0,75500488	-0,0002427	0,00091034	0,00033378
0,75478516	0,75500488	0,75489502	-0,0002427	0,00033378	4,5528E-05
0,75478516	0,75489502	0,75484009	-0,0002427	4,5528E-05	-9,8589E-05
0,75484009	0,75489502	0,75486755	-9,8589E-05	4,5528E-05	-2,6531E-05
0,75486755	0,75489502	0,75488129	-2,6531E-05	4,5528E-05	9,4984E-06
0,75486755	0,75488129	0,75487442	-2,6531E-05	9,4984E-06	-8,5164E-06
0,75487442	0,75488129	0,75487785	-8,5164E-06	9,4984E-06	4,91E-07
0,75487442	0,75487785	0,75487614	-8,5164E-06	4,91E-07	-4,0127E-06







α_n semble tendre vers 1 quand $n \to +\infty$.