Corrigé exercice 121 :

Partie A :

1. Pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{-3}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-3-x}{x^2}$.
2. $g'(x)$ est du signe de $-3-x$ car $x^2 > 0$ donc $g'(x) < 0$ sur $]0;+\infty[$. g est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
3. $g(1) = 2$ et $g(2) = 0{,}5 - \ln(2) < 0$. De plus, g est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires vu dans le chapitre 6, il existe un unique réel $\alpha \in]1;2[$ tel que $g(\alpha) = 0$. À l'aide de la calculatrice on obtient $\alpha \approx 1{,}86$.

Partie B :

1. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\ln(x) + \dfrac{-x+3}{x} = g(x)$.
2. Par stricte décroissance de g on déduit que $f'(x) > 0$ pour $x \in]0;\alpha[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]\alpha;+\infty[$. Ainsi, f est croissante pour $x \in]0;\alpha[$ et décroissante pour $x \in]\alpha;+\infty[$.
3. La fonction h est définie sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonction dérivables sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{-3}{x} + 2 + 2\ln(x)$. On est donc amené à étudier la fonction auxiliaire k définie sur $]0;+\infty[$ par $k(x) = \dfrac{-3}{x} + 2 + 2\ln(x)$. Cette fonction est dérivable et, pour tout réel $x > 0$, $k'(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{3+2x}{x^2}$. Pour tout $x > 0$, $k'(x) > 0$ donc k est strictement croissante. De plus, $k(1) = -1$, $k(2) = 0{,}5 + 2\ln(2) > 0$ et k est continue sur $]0;+\infty[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires étudié dans le chapitre 6, il existe un unique réel $\alpha \in]1;2[$ tel que $k(\alpha) = 0$. On en déduit que $h'(x) < 0$ pour $x \in]0;\alpha[$ et $h'(x) > 0$ pour $x \in]\alpha;+\infty[$. Ainsi h est décroissante sur $]0;\alpha[$ et croissante sur $]\alpha;+\infty[$.