Corrigé exercice 67 :

1. Pour tout $x > 0$, on a $-1 \leqslant \sin(\ln(x)) \leqslant 1$ donc $\dfrac{-1}{x^2+1} \leqslant \dfrac{\sin(\ln(x))}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{x^2+1}$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(\ln(x))}{x^2+1} = 0$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x^2\ln(x) = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-1x+2}{x^3+7x^2+3x+4} = 1$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(\dfrac{x^3+2x^2-x+2}{x^3+7x^2+3x+4}\right) = 0$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x+7}{x^3+3x+4} = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+2x+7}{x^3+3x+4}\right) = -\infty$.