Evaluation - Chap 9

TMATH1

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x).$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle et on note f' sa fonction dérivée

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $\quad f'(x) = -4x\ln(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de la fonction sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ et que $\alpha \in [1\ ;\ \mathrm{e}]$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

5. On donne la fonction ci-dessous écrit en Python. L'instruction *from lycee import ** permet d'accéder à la fonction ln.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1+x**2-2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p) :
    a=1
    b=2.7
    while b-a > 10**(-p) :
    |   if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
    |   |  b = (a+b)/2
    |   else :
    |   |  a=(a+b)/2
    |     return (a,b)
```

Il écrit dans la console d'exécution :

`>>> dichotomie(1)`

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente ? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination)

Proposition A :	(1.75, 1.9031250000000002)
Proposition B :	(1.85, 1.9031250000000002)
Proposition C :	(2.75, 2.9031250000000002)
Proposition D :	(2.85, 2.9031250000000002)

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $\quad g'(x) = \dfrac{f(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.
2. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $x = \alpha$.
   On admet que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.
3. On note T_1 la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse α.
   Déterminer, en fonction de α, les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_α.