Chapitre 1 - Nombres complexes : partie algébrique

Terminales - Maths Expertes

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.
On admet que l'on peut construire un ensemble appelé **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, contenant tous les éléments de $\mathbb{R}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles définies sur $\mathbb{R}$ et qui ont les mêmes propriétés algébriques (la distributivité par exemple).
2. $\mathbb{C}$ contient une élément noté i vérifiant $i^2 = -1$
3. pour tout élément z de $\mathbb{C}$ il existe un unique couple $(a; b)$ tel que

$$z = a + ib$$

Cette écriture est appelée **forme algébrique** de z.
- le nombre a est appelé la partie réelle de z : $a = \mathrm{Re}(z)$
- le nombre b est appelé la partie imaginaire de z : $b = \mathrm{Im}(z)$

Remarque .
1. Si $b = 0$ alors $z = a$ est un **nombre réel.**
2. Si $a = 0$ alors $z = ib$ est un **imaginaire pur.**
3. **Attention :** La partie imaginaire de z est toujours un nombre réel. Ne pas confondre b et ib.

4. Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe, c'est trouver les réels a et b tels que $z = a + ib$.

Exemple :
$z = 2 + 3i$ est un nombre complexe dont la partie réelle $a = 2$ et la partie imaginaire $b = 3$

$z = 5i$ est un imaginaire pur.

Propriété 1.1.
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Cas particulier : $z = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right.$

Exemple :
Etudier l'exemple corrigé (application-méthode 1) du livre scolaire p21.

1.2 Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

Propriété 1.2.
L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ suivent les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$ en tenant compte que $i^2 = -1$.
Quelques soient les réels a,b,a',b',k on a :

1. $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$
2. $(a + ib) - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b')$
3. $k(a + ib) = (ka) + i(kb)$
4. $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Remarque .
Les parties réelles et imaginaires sont **linéaires** :

- $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$
- $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$
- $\mathrm{Re}(kz) = k\,\mathrm{Re}(z)$
- $\mathrm{Im}(kz) = k\,\mathrm{Im}(z)$

Propriété 1.3.
Pour tous nombres complexes z,z',z'', l'addition et la multiplication vérifient :

1. **Commutativité :** $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$
2. **Associativité :** $(z + z') + z'' = z + (z' + z'') = z + z' + z''$ et $(zz')z'' = z(z'z'') = zz'z''$
3. **Eléments neutres :** $z + 0 = z$ et $z \times 1 = z$.
4. **Distributivité :** $z(z' + z'') = zz' + zz''$
5. **Produit nul :** $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$

Remarque .
Identités remarquables :

- $(a + ib)^2 = a^2 + 2ab.i - b^2$
- $(a - ib)^2 = a^2 - 2ab.i - b^2$
- $(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$

1.3 Triangle de Pascal - Coefficients binomiaux - Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.

Cette partie sera également étudiée en spécialité dans $\mathbb{R}$. Nous n'aborderons pas la théorie ici mais seulement une application aux complexes.

Propriété 1.4 (Triangle Pascal).
Pour $0 \leqslant k \leqslant n$ on peut construire le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|ccccccc}
n & & & & & & & \\
\hline
0 & 1 & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & & \\
2 & 1 & 2 & 1 & & & & \\
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
6 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\cline{2-8}
 & \multicolumn{7}{c}{k}
\end{array}$$

Le nombre $\binom{n}{k}$ est donné par ce triangle. Par exemple $\binom{5}{3} = 10$

Propriété 1.5 (Formule du binôme).

Pour tous nombres complexes u et v et pour n entier naturel, on a

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$$

Remarque .
Cas particulier :
$(u+v)^2 = \binom{2}{0} u^2 v^0 + \binom{2}{1} u^1 v^1 + \binom{2}{2} u^0 v^2 = u^2 + 2u.v + v^2$, on retrouve l'identité remarquable
Exemple :

1. Développer $(1+i)^3$
2. Développer $(1+z)^4$
3. Etudier l'application- méthode 2 p22

2 Nombres Complexes conjugués

2.1 Définition et propriétés algébriques

Définition 2.1.
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z le nombre, noté $\bar{z} = a - ib$.

Exemple :
Si $z = 3 - 2i$ alors $\bar{z} = 3 + 2i$.

Propriété 2.1.
Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, on a :

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $z - \bar{z} = 2ib$
3. si z est un imaginaire pur alors $\bar{z} = -z$
4. $z + \bar{z} = 2a$
5. Si z est réel alors $\bar{z} = z$
6. $z\bar{z} = a^2 + b^2$

Démonstration. Faite en classe. CQFD

Exemple :

Etudier l'application- méthode 3 p23

2.2 Inverse et quotient

Définition 2.2.
L'inverse d'un nombre complexe non nul z est le nombre complexe Z tel que $Z \times z = 1$. On le note $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}}$

Pour tous nombres complexes z et z' avec $z \neq 0$, on définit le quotient $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$.

Remarque .
Le calcul du quotient et de l'inverse nécessite le conjugué pour déterminer la forme algébrique.
Exemple :

- $\frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$
- $\frac{2+i}{3+2i} = (2+i) \times \frac{1}{3+2i} = (2+i) \times (\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i) = \frac{6}{13} - \frac{4}{13}i + \frac{3}{13}i + \frac{2}{13} = \frac{8}{13} - \frac{1}{13}i$
- $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1+1} = \frac{1-2i-1}{2} = -\frac{2i}{2} = -i$

Exemple :
Applications :

Etudier l'application méthode 4 p24

2.3 Conjugués et opérations

Propriété 2.2.
Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout nombre relatif n, on a :

1. $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
2. $\overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z'}$
3. Si $z \neq 0$ alors $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\bar{z}}$
4. Si $z' \neq 0$ alors $\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
5. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ (si $n < 0$ z doit être non nul.)

Démonstration. Faite en classe. CQFD

Exemple :

Etudier l'application méthode 5 p25

3 Equations polynomiales de degré supérieur ou égal à 2

3.1 Résolution des équations du second degré à coefficients réels

Dans cette partie les a,b,c sont des nombres réels avec $a \neq 0$ et z est un nombre complexe. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{1}$$

Définition 3.1.
On appelle **discriminant** du trinôme $az^2 + bz + c$ le nombre réel, noté Δ défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Propriété 3.1.
Pour résoudre (1) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, on calcule le discriminant Δ.

1. Si $\Delta > 0$ alors l'équation (1) admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation (1) admet une unique solution réelles :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

3. Si $\Delta < 0$ alors l'équation (1) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Démonstration. Les points 1 et 2 ont été démontrés en classe de 1ere.
Pour le point 3. $a \neq 0$ donc on peut en déduire la forme canonique :
$az^2 + bz + c = a(z^2 + \frac{b}{a}z) + c = a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c = a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$\Delta < 0$ donc $\Delta = i^2|\Delta|$

L'équation (1) $\Leftrightarrow a(z + \frac{b}{2a})^2 - i^2\frac{|\Delta|}{4a} = 0$

En divisant par a : $\Leftrightarrow (z + \frac{b}{2a})^2 - i^2\frac{|\Delta|}{4a^2} = 0$
$\Leftrightarrow (z + \frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a})(z + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}) = 0$

Ce qui par équation produit-nul donne le résultat

$z + \frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 0$ ou $z + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 0$

$$z = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

CQFD

Exemple :

Etudier l'application-méthode 6 p27

3.2 Equations polynomiales à coefficients réels

Définition 3.2.
Soit n un entier naturel et soient $a_0,a_1,\dots a_n$ des nombres réels avec $a_n \neq 0$. On appelle fonction polynôme de degré n à coefficients réels, la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

L'équation $P(z) = 0$ est appelée équation polynomiale de degré n.

Remarque .
Si $a_n = 1$ on dit que P est unitaire.

Propriété 3.2.
Soient z et a deux nombres complexes. Pour tout entier naturel $n \neq 0$, on a :

$$z^n - a^n = (z - a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k$$

Démonstration. Développons $(z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}a^k = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}a^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1}a^{k+1}$

$\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}a^k = z^n.a^0 + z^{n-1}.a^1 + z^{n-2}.a^2 + \ldots + z^{n-n+1}.a^{n-1} = z^n + z^{n-1}.a + z^{n-2}.a^2 + \ldots + z.a^{n-1}$

$\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1}a^{k+1} = z^{n-1}.a + z^{n-2}a^2 + \ldots z^{n-n+1-1}a^n = z^{n-1}.a + z^{n-2}a^2 + \ldots a^n$

En soustrayant ces deux sommes terme par terme, on trouve :

$\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}a^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1}a^{k+1} = z^n - a^n$

CQFD

Propriété 3.3.
Soit a un nombre complexe. Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. Si $P(a) = 0$ alors P peut être factorisé par $(z-a)$. C'est à dire qu'il existe un polynôme Q tel que deg(Q)=deg(P)-1 tel que pour tout $z \in \mathbb{C}; P(z) = (z-a)Q(z)$.

Démonstration. P est un polynôme complexe de degré $n \geqslant 1$ à coefficients réels α_p. avec $\alpha_n \neq 0$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p z^p$.

Pour $a \in \mathbb{C}$ racine de P d'après la propriété 4.1 :

$$z^p - a^p = (z-a)\sum_{k=0}^{p-1} z^{p-1-k}a^k$$

Or $P(z) = P(z) - P(a)$ car $P(a) = 0$ donc

$P(z) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p z^p - \sum_{p=0}^{n} \alpha_p a^p \Leftrightarrow P(z) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p (z^p - a^p) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p (z-a) \sum_{k=0}^{p-1} z^{p-1-k}a^k$

$P(z) = (z-a)\sum_{p=0}^{n} \alpha_p (z^{p-1} + z^{p-2}a + z^{p-3}a^2 + \ldots + a^{p-1}) = (z-a)Q(z)$ avec deg(Q)$=n-1$ CQFD

Propriété 3.4.
Pour tout n entier naturel, un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Exemple :

Etudier Application et méthode 7 p29

Propriété 3.5 (Formules de Viète).
Pour tout n entier naturel non nul, $P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ polynôme de degré n à coefficients réels avec $\alpha_n \neq 0$.
Alors

- La somme des racines de P est égale à $-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$
- Le produit des racines de P est égal à $(-1)^n \frac{\alpha_0}{\alpha_n}$

Exemple :

Soit un polynôme unitaire P de degré 2 (cela signifie que $P(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$. Les racines de P sont $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i$. En déduire α_0 et α_1 et l'expression de P.
$z_1 + z_2 = 2$ donc $-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\alpha_1 = 2 \Leftrightarrow \alpha_1 = -2$
$z_1 \times z_2 = (1 + 2i)(1 - 2i) = 5$ donc $(-1)^2 \dfrac{\alpha_0}{\alpha_2} = \alpha_0 = 5$
On trouve $P(z) = z^2 - 2z + 5$