Chap 3- Calcul matriciel et applications aux graphes

Maths expertes

1 Matrices

1.1 Définition

Définition 1.1.
Une matrice $\mathbf{M}(n \times m)$ est un tableau de nombres possédant n lignes et m colonnes. On écrit :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemple :

Soit A la matrice (2×3) définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

On a par exemple $a_{21} = 4$ et $a_{13} = 0$

1.2 Matrices particulières

1. Si $n = 1$ alors
$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \end{pmatrix}$$
M est appelée matrice ou **vecteur ligne**
2. Si $m = 1$ alors
$$M = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$
M est appelée matrice ou **vecteur colonne**
3. Si $n = m$ alors M est appelée **matrice carrée**.
4. Si M est une matrice carrée, on dit que M est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour $i \neq j$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. On définit la **matrice unité** I_n d'ordre n la matrice carrée qui possède des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. On définit la matrice diagonale D_3 d'ordre 3 la matrice qui ne contient des éléments non nuls que sur sa diagonale.

$$D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

7. On définit une matrice triangulaire d'ordre m par une matrice carré qui possède un triangle composé de 0. Si la diagonale est également composée de 0 on dit que la diagonale est strictement triangulaire.

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

T_3 est triangulaire supérieure.

$$T'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T'_3 est triangulaire strictement triangulaire.

1.3 Opérations sur les matrices

Addition
L'addition ou la soustraction de deux matrices de même dimension A et B est égale à la matrice C dont chaque coefficient est obtenu en additionnant les coefficient de la matrice A au coefficient correspondant de la matrice B.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Multiplication d'une matrice par un scalaire
Le produit d'une matrice A par un scalaire λ est égale à une matrice B dont chaque coefficient est obtenu en multipliant les coefficients de A par λ.
$2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Transposition d'une matrice
La transposée ${}^tM$ d'une matrice $M(n \times m)$ est la matrice $(m \times n)$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice M $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
Alors ${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Produit de matrices

Le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne est égale à la somme des produits de chaque coefficient du vecteur ligne avec le coefficient correspondant du vecteur colonne.

$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 5 + 3 \times 2 + (-1) \times 3 = 23$

Remarque : il s'agit du produit scalaire de deux vecteurs.

Le produit de la matrice $A(n \times m)$ avec la matrice $B(m \times p)$ est égale à la matrice $C(n \times p)$ où chaque coefficient c_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice A avec la colonne j de la matrice B.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 5 \\ 4 \times 5 + 3 \times 2 - 1 \times 3 & 4 \times 1 + 3 \times 3 - 1 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$

Si A est une matrice de taille $n \times m$ et B une matrice de taille $(m \times p)$, alors les coefficients de la matrice $C = AB$ de taille $n \times p$ sont donnés par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Remarque : Le produit de matrices est :

- Elément neutre $A \times I_n = I_n \times A = A$
- Associatif : $A(B \times C) = (A \times B)C = A \times B \times C$
- Distributif : $A(B + C) = A \times B + A \times C$
- NON COMMUTATIF : $AB \neq BA$ en général.

Ecriture matricielle d'un système linéaire

Soit le système S linéaire d'ordre n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On pose $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$

On a l'écriture matricielle du système (S) est $MX = B$.

Inversion de matrice

Une matrice carrée M est **inversible** ou régulière si et seulement si il existe une matrice carrée, appelée matrice inverse notée M^{-1} telle que

$$M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I$$

où I est la matrice unité.
Si M n'est pas inversible on dit que M est singulière.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
Montrer que $B = \begin{pmatrix} -0.5 & 1.5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
Alors $A \times B = \begin{pmatrix} -2+3 & 6-6 \\ -1+1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
On a le même résultat avec $B \times A$.

Définition : Soit une matrice carrée d'ordre 2 M. On appelle le determinant de la matrice le nombre réel det(M).
$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors det($M$)$=ad - bc$

Propriété : Une matrice M est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0.
$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et det(M)$\neq$ 0 alors $M^{-1} = \dfrac{1}{det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Puissance n-ième de matrice

On appelle puissance n-ième de matrice carrée M, la matrice M^n telle que

$$M^n = \overbrace{M \times M \cdots \times M}^{nfois}$$

Transformations du plan

Une translation $\vec{t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ qui à tout point $M(x;y)$ du pl ;an associe une image $M'(x';y')$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{t}$ se définit comme somme matriciel de deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Propriété 1.1.
Pour les transformations géométriques planes suivantes, on définit la matrice de transformation $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui à tout point $M(x,y)$ du plan, associe son point image $M'(x';y')$ tel que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- Pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisse on a $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées on a $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Pour une rotation de centre O d'angle θ on a $T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- Pour une homothétie de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}$,on a $T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Exemple :
Voir Application et méthode p 182

2 Représenter une situation à l'aide de graphes

2.1 Définitions

Le schéma ci-dessous est appelé **graphe**.
Les points A, B, C, D et E sont les **sommets** de ce graphe.
Les segments reliant deux sommets sont appelés **arêtes**.

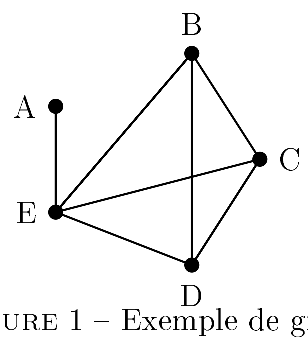

FIGURE 1 – Exemple de graphe

L'ordre d'un graphe est égal au nombre total de sommets. Le graphe ci-dessus est d'ordre 5.
On dit que deux sommets sont **adjacents** s'ils sont reliés par une arête.
Les sommets A et E sont adjacents mais les sommets A et B ne sont pas adjacents.

Un graphe est **complet** si deux sommets quelconques sont reliés par une arête.

Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même.
Un graphe **simple** est un graphe sans boucle et tel qu'entre deux sommets il y a au plus une arête.

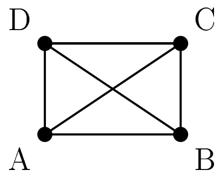

FIGURE 2 – graphe complet d'ordre 4

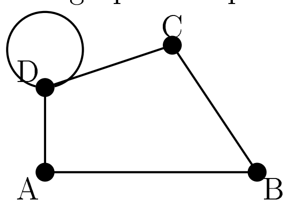

FIGURE 3 – boucle

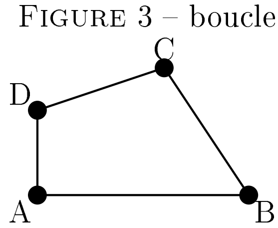

FIGURE 4 – graphe simple

Un graphe **orienté** est un graphe tel que les arêtes ont un sens de parcours : le sens de la flêche nous donne le sens de parcours. On parle dans ce cas d'arcs.

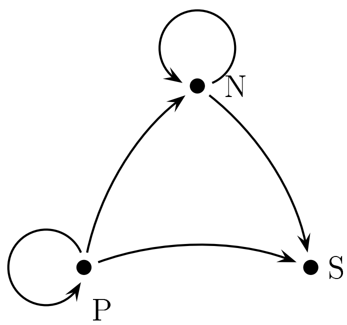

FIGURE 5 – graphe orienté

Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet.
Dans la figure 6, Le sommet A est de degré 1. Le sommet B est de degré 3.

Propriété 2.1.
La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes de ce graphe.

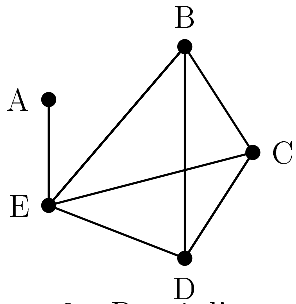

FIGURE 6 – Degré d'un sommet

Exemple : Reprenons la figure 6.

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	1	3	3	3	4

La somme des degré est de 14 qui correspond au double du nombre d'arêtes (ici 7).

3 Graphes connexes, Chaîne eulérienne

3.1 Définitions

Une **chaîne** est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste est adjacent au suivant.

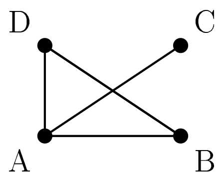

FIGURE 7 – chaîne : A-D-B

La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent. La chaîne de l'exemple précédent est de longueur 2.
Une chaine **fermée** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
Dans la figure 7, la chaîne A-D-B-A est fermée.

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne contenant toutes les arêtes du graphe une fois et une seule fois.
Dans la figure 7, la chaîne A-D-B-A-C est eulérienne.

Un graphe est **connexe** s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

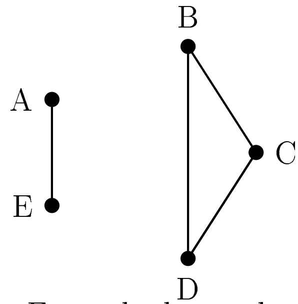

Figure 8 – Exemple de graphe non connexe

3.2 Propriétés

Théorème 3.1.
Théorème d'Euler : Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.

- Si il n'y a aucun sommet de degré impair, la chaîne est fermée.
- Si il y a deux sommets de degré impair, l'origine de la chaîne est l'un de ces sommets et l'extrémité est l'autre sommet.

Exemples :

1. Exemple 1 :
   - Dans le graphe G_1 ci-dessous, expliquer pourquoi A-B-C-E est une chaîne.
   - Expliquer pourquoi A-B-C-E-B-A est une chaîne fermée de G_1.
   - Expliquer pourquoi B-A-D-C-B-E-C est une chaîne eulérienne. Donner un autre exemple de chaîne eulérienne.

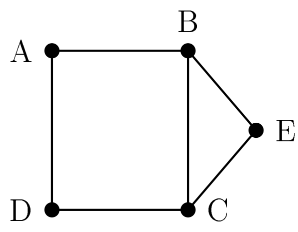

Figure 9 – graphe G_1

2. Exemple 2 : Le graphe G_2 ci-dessous est-il connexe ? Le graphe G_3 est-il connexe ?
3. Vérifier que chacun des graphes G_4,G_5,G_6 ci-dessous sont connexes. Dites s'ils admettent une chaîne eulérienne. Dans ce cas, précisez les extrémités de la chaîne.

FIGURE 10 – graphe G_2 et G_3

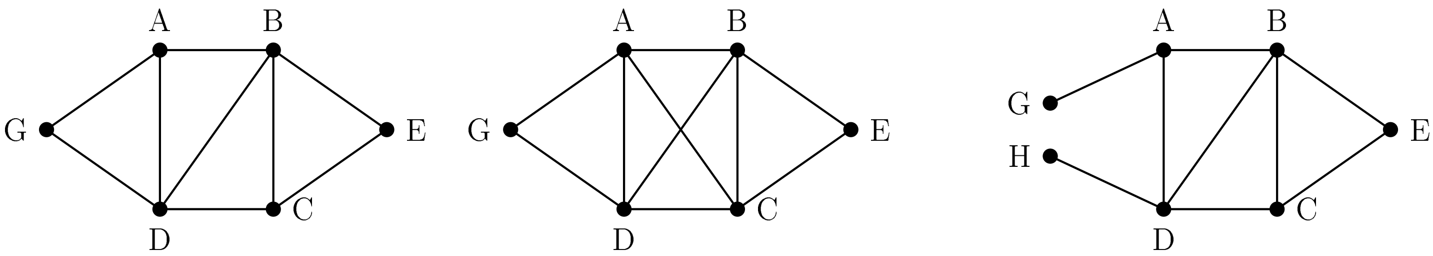

FIGURE 11 – Graphes G_4,G_5,G_6

3.3 Colorier un graphe

Définition 3.1.
Colorier les sommets d'un graphe, c'est leur attribuer une couleur afin que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur

Algorithme de Welsh-Powell :

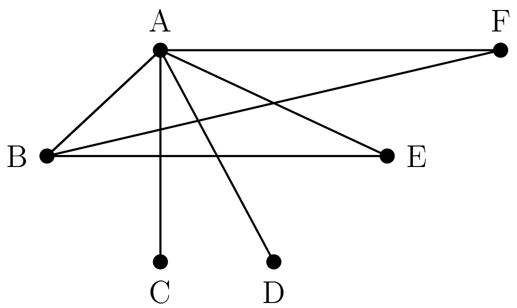

FIGURE 12 – Graphes algorithme Welsh-Powell

1. On range les sommets du plus haut degré au plus petit :
   - Sommet A : degré 5
   - Sommet B : degré 3
   - Sommet F : degré 2
   - Sommet E : degré 2
   - Sommet D : degré 1
   - Sommet C : degré 1
2. On choisit une couleur pour le premier sommet, ici A

3. On colorie de la même couleur tous les sommets non adjacents au sommet A et qui ne sont pas adjacents entre eux. Ici, il n'y en a pas.
4. On recommence avec une autre couleur pour le premier sommet non colorié, ici le sommet B. On peut colorier de la même couleur les sommets C et D.
5. On continue jusqu'à ce que tous les sommets soient coloriés. Ici, on colorie le sommet F et on peut prendre la même couleur pour le sommet E.
   Nous avons pu colorier ce graphe avec 3 couleurs.

4 Matrice d'adjacence associée à un graphe

4.1 Graphe non orienté

Définition 4.1.
La matrice d'adjacence associée à un graphe non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est la matrice carrée d'ordre n dont le terme figurant en ligne i et en colonne j est égal au nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.

Exemple :

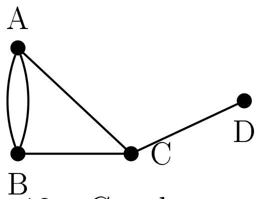

Figure 13 – Graphe non orienté

La matrice d'adjacence associée à ce graphe non orienté est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Graphe orienté

Définition 4.2.
La matrice d'adjacence associée à un graphe orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés est la matrice carrée d'ordre n dont le terme figurant en ligne i et en colonne j est égal à 1 s'il existe une arête menant de i à j et 0 sinon.

Exemple :
La matrice d'adjacence associée à ce graphe orienté est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

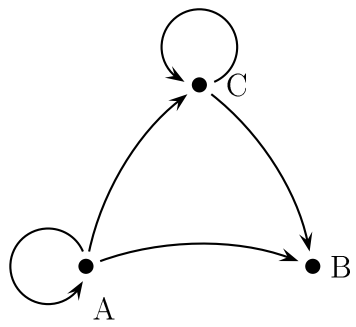

FIGURE 14 – graphe orienté

C- Puissance d'une matrice

Théorème 4.1.
Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe. Soit p un nombre entier, alors la matrice A^p est la matrice puissance p-ième de A telle que

$$A^p = A \times A \times A ... \times A.$$

L'élément p_{ij} de la matrice A^p est égal au nombre de chaîne de longueur p reliant le sommet i au sommet j.

Soit la matrice du graphe de la figure 13 ;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 7 & 2 \\ 12 & 4 & 7 & 2 \\ 7 & 7 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi il y a 12 chemins pour aller de A à B contenant des chaînes de longueur 3