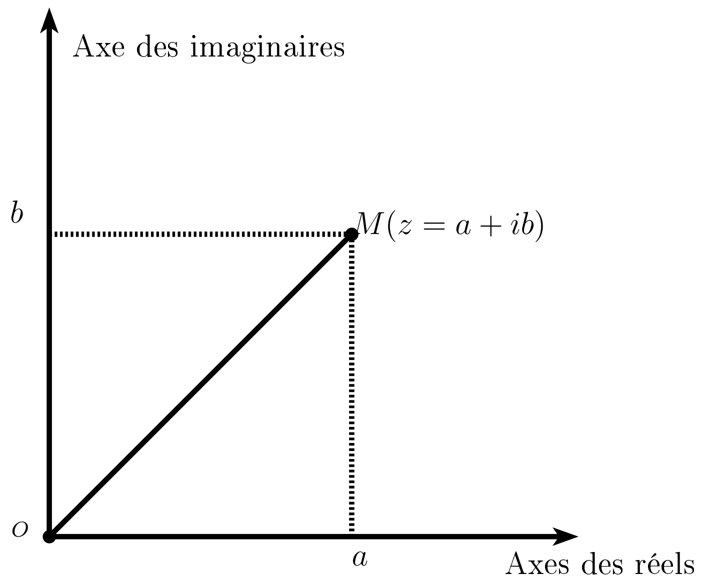
Nombres Complexes - Point de vue géométrique

Maths Expertes

1 Représentation Géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
A tout point M du plan de coordonnées $(a; b)$ est associé le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** du point M.
Le point M de coordonnées $(a; b)$ est appelé **image** du nombre complexe $z = a + ib$. On note $M(a + ib)$
On dit aussi que le nombre complexe $z = a + ib$ est **l'affixe** du vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a; b)$ et que $\vec{w}$ est le **vecteur image** de z.



Remarque .
Les points d'affixes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.(symétrie axiale)
Les points d'affixes z et $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine.(symétrie centrale)

Propriété 1.1.
Soit $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixe z_1 et z_2.

1. Le vecteur $\vec{w_1} + \vec{w_2}$ a pour affixe $z_1 + z_2$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le vecteur $\lambda.\vec{w_1}$ a pour affixe $\lambda.z_1$

Démonstration. Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $\vec{w_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w_2} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

1. $\vec{w_1}+\vec{w_2}=\begin{pmatrix}a_1+a_2\\ b_1+b_2\end{pmatrix}$

   Donc $z_{\vec{w_1}+\vec{w_2}}=a_1+a_2+i(b_1+b_2)=(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=z_{\vec{w_1}}+z_{\vec{w_2}}$

2. $\lambda.\vec{w_1}=\begin{pmatrix}\lambda.a_1\\ \lambda.b_1\end{pmatrix}$

   Donc $z_{\lambda.\vec{w_1}}=\lambda a_1+i\lambda b_1=\lambda(a_1+ib_1)=\lambda z_{w_1}$.

CQFD

Propriété 1.2. 1. Si A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe z_B-z_A. On écrit :

$$\boxed{\text{Affixe}(\overrightarrow{AB})=z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A}$$

2. Soit I le milieu de $[AB]$, z_A,z_B et z_I les affixes respectives de A,B et I alors :

$$\boxed{z_I=\frac{z_A+z_B}{2}}$$

Démonstration. 1. D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ donc $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

2. I milieu de [AB] alors $\overrightarrow{AB}=2.\overrightarrow{AI}$ et d'après ce qui précède $z_{\overrightarrow{AB}}=2z_{\overrightarrow{AI}}$

   D'où $z_B-z_A=2(z_I-z_A)\Leftrightarrow z_B-z_A=2z_I-2z_A\Leftrightarrow z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$

CQFD

1.1 Module d'un nombre complexe

Le **module** du nombre complexe $z=a+bi$ avec a et b réels est le réel positif, noté $|z|$, défini par :

$$\boxed{|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\times\overline{z}}}$$

Interprétation géométrique Le module de z est la distance entre l'origine O du repère et le point $M(z)$.
$OM=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Théorème 1.1.
Soit z et w deux nombres complexes quelconques. Alors on a :

1. $|z|=0\Leftarrow z=0$
2. $|z|^2=z\times\bar{z}$
3. $|z\times w|=|z|\times|w|$
4. Si $w\neq 0$, $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$
5. Inégalité triangulaire : $|z+w|\leq|z|+|w|$
6. Si A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B alors :

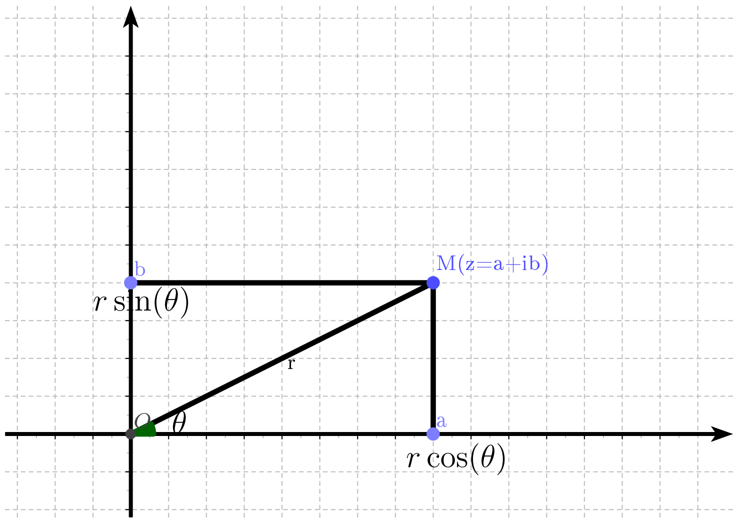
$$\boxed{AB=|z_B-z_A|}$$

1.2 Argument d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul de point image M de coordonnées $(a;b)$.
On appelle **argument** de z et on note arg z toute mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$

Remarque : Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments.
Si θ est l'un d'entre eux, les autres sont de la forme $\theta + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On note arg $z = \theta$ [mod 2π]. On lit "θ modulo 2π"
Le réel 0 n'a pas d'argument.

2 Forme trigonométrique d'un complexe non nul



L'écriture : $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ est appelée **forme trigonométrique** de z.

avec $r = |z|$ (module de z) et arg $z = \theta$ [mod 2π]

2.1 Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique

z est un complexe non nul qui s'écrit $z = a + bi$ avec a et b réels.
On note : $r = |z|$ et θ un argument de z.
Si on connaît r et θ alors : $\boxed{a = r\cos\theta \text{ et } b = r\sin\theta}$

Si on connaît a et b alors :

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \text{ et } \theta \text{ défini par : } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}}$$

2.2 Egalité entre deux complexes écrits sous forme trigonométrique

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\arg z = \theta \ [\text{mod } 2\pi]$
et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec $r' = |z'|$ et $\arg z' = \theta' \ [\text{mod } 2\pi]$ alors :

$$\boxed{z = z' \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \theta = \theta' \ [\text{mod } 2\pi]}$$

2.3 Argument d'un produit

Propriété 2.1.
Formule de l'addition : Rappels

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Propriété 2.2.
Soit z et w deux complexes non nuls. Alors :

$$\arg(z \times w) = \arg(z) + \arg(w) \ [\text{mod } 2\pi]$$

Démonstration. Soit z et w deux complexes non nuls avec :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\arg z = \theta \ [\text{mod } 2\pi]$
et $w = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec $r' = |w|$ et $\arg w = \theta' \ [\text{mod } 2\pi]$
On a :

$$\begin{aligned} z \times w &= rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= rr'((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')) \end{aligned}$$

Comme $rr' > 0$, alors $\arg(z \times w) = \theta + \theta'$

CQFD

Propriété 2.3.
Pour tous nombres complexes z et w non nuls :

1. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg\,(z) \ [\text{mod } 2\pi]$
2. $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg\,(z) - \arg\,(w) \ [\text{mod } 2\pi]$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\arg\,(z^n) = n \times \arg z \ [\text{mod } 2\pi]$
4. $\arg \overline{z} = -\arg z \ [\text{mod } 2\pi]$

3 Notation exponentielle

Soit f la fonction qui à tout réel θ associe le complexe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$
Pour tous réels θ et θ', on a vu que : $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$ et $f(0) = 1$: f vérifie une relation fonctionnelle analogue à celle de la fonction exponentielle.
Notation : Pour tout nombre réel θ, on note $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

Définition 3.1.
Une **forme exponentielle** d'un nombre complexe z non nul d'argument θ est :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Propriété 3.1.
Pour tous nombres réels θ et θ' et n entier naturel :

1. $|e^{i\theta}| = 1$ et $arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$
2. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
3. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
4. $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$ (Formule d'Euler)
5. $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta n}$
6. $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ (Formule de Moivre)
7. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

4 Angles orientés et arguments

Soit A et B sont deux points du plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v})$ d'affixes respectives z_A et z_B et M est le point d'affixe z_M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
On sait que : $z_M = z_B - z_A$ et d'autre part : $\arg(z_M) = \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right)$. On obtient donc :

$$\boxed{\arg\left(z_B - z_A\right) = \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right)}$$

4.1 Conséquence

Soit A,B,C et D 4 points du plan d'affixes respectives z_A,z_B,z_C et z_D avec $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$. Alors :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)}$$

5 Racine n-ième de l'unité

Définition 5.1.
On appelle cercle unité, noté $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1. il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$

Propriété 5.1.
On considère deux nombres complexes z et z' de $\mathbb{U}$ alors $zz' \in \mathbb{U}$ et $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$

Définition 5.2.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle racines n-ième de l'unité les solutions de l'équation complexe $z^n = 1$

Propriété 5.2.
On a $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}}; k \in \mathbb{N}; 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$. $\mathbb{U}_n$ contient exactement n éléments.
Si $n \geqslant 3$; alors les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n cotés.