Sujet 1 - BB2

Exercice 1 les demonstrations sont données par la corrections, elles n'etaient pas demandées

1) reponse b

$g(x) = x^{1000} + x$ $\quad g'(x) = 1000x^{999} + 1$

$g''(x) = 999\,000\, x^{998}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $g''(x) \geq 0 \Leftrightarrow g$ est convexe sur $\mathbb{R}$

2) reponse a

Par lecture graphique $f'(0) = 1$ donc le coef. directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est 1 donc T est parallèle à la droite d'equation $y = x$

3) reponse c.

$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $-1 \leq \frac{-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$

la suite (u_n) est bornée

4) reponse b.

$a_{n+1} = \frac{e^n}{e^n+1} a_n$. et $a_0 = 1$

$a_0 > 0$ et

$\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < \frac{e^n}{e^n+1} < 1$ donc a_n est décroissante

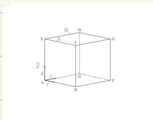
5) reponse a)

Graphiquement, f est concave sur $[-2;1]$ et convexe sur $[1;4]$

donc $f''(x) \leq 0$ sur $[-2;1]$ et $f''(x) > 0$ sur $(1;4)$

Exercice 2

1)



2) $\vec{PR}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $PR = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\vec{QR}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ $QR = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$PR = QR \Rightarrow$ le triangle PQR est isocèle en R.

3) Les vecteurs $\vec{PR}$ et $\vec{QR}$ ne sont pas colinéaires donc les points P, Q et R ne sont pas alignés, donc ils définissent un plan.

4 a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{PR} = 2\times1 + 1\times0 - 1\times2 = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{PR}$

$\vec{u}\cdot\vec{QR} = 2\times1 + 1\times(-2) - 1\times0 = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{QR}$

$\vec{u}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de (PQR) donc $\vec{u}$ est normal à (PQR)

b) $\vec{u}$ normal à (PQR)

$(PQR) : 2x + y - z + d = 0$

$P \in (PQR) \Rightarrow -1 + d = 0 \iff d = 1$

$\boxed{(PQR) : 2x + y - z + 1 = 0}$

c) (d) est orthogonale à (PQR) donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d. $E \in d$ donc

$M(x,y,z) \in d \iff \vec{EM} = t\,\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$$(d) : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t+3 \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}$$

(d) L projeté orthogonal de E sur (PQR)

$L \in (PQR) \Rightarrow 2x + y - z + 1 = 0$

$L \in d \Rightarrow 2(2t) + t - (-t+3) + 1 = 0$

$6t - 2 = 0$

$t = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} x_L = 2\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ y_L = \frac{1}{3} \\ z_L = -\frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$\boxed{L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)}$

e) $\vec{EL}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $EL = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

5)

$V = \frac{1}{3} \times B \times h$ $\mathcal{A}(EQR) = \frac{EQ \times ER}{2} = 1$ $PE = 2$

$= \frac{1}{3} \mathcal{A}(EQR) \times PE = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}$

6) $V = \frac{1}{3} \mathcal{A}(PQR) \times EL = \frac{2}{3} \iff \frac{1}{3} \mathcal{A}(PQR) \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt{6}}{9} \mathcal{A}(PQR) = \frac{2}{3} \iff \mathcal{A}(PQR) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$

Exercice 3

1) a) $p_1 = 0{,}3 + 0{,}7\, p_0^2 = 0{,}363$

$p_2 = 0{,}3 + 0{,}7\, p_1^2 = 0{,}392$

la probabilité d'avoir au plus une descendance est de 0,363

la probabilité d'avoir au plus 2 descendances est de 0,392

b) p("au moins 11 descendce") = 1 − p("au plus 10")

= 1 − 0,428 = 0,572

c) p_n semble croissante et converger vers 0,43.

2a) Initialisation $p_0 = 0{,}3$; $p_1 = 0{,}363$

$0 \leq p_0 \leq p_1 \leq 0{,}5$ la pté est vraie

HR : On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que $0 \leq p_k \leq p_{k+1} \leq 0{,}5$

Hérédité : Sur [0,1]; la fonction carrée est croissante $\iff 0 \leq p_k^2 \leq p_{k+1}^2 \leq 0{,}25$

$\iff 0 \leq 0{,}7\, p_k^2 \leq 0{,}7\, p_{k+1}^2 \leq 0{,}175$

$\iff 0{,}3 \leq 0{,}7\, p_k^2 + 0{,}3 \leq 0{,}7\, p_{k+1}^2 + 0{,}3 \leq 0{,}475$

$\iff 0 \leq p_{k+1} \leq p_{k+2} \leq 5$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0{,}5$

b) p_n est une suite croissante majorée donc elle converge

3 a) $f(x) = 0,3 + 0,7x^2$

$p_{n+1} = f(p_n)$ f est continue, $[0;0.5]$ est stable par f.

p_n est convergente donc l la limite de p_n est solution de $f(x) = x$

$\Leftrightarrow 0,3 + 0,7x^2 = x$

$\Leftrightarrow \boxed{0,7x^2 - x + 0,3 = 0.}$

b) $\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4}{25}$

$x_1 = \frac{3}{7}$ $x_2 = 1 > 0,5$

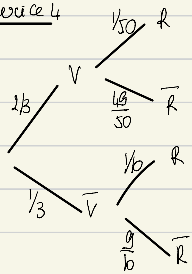
$l = \frac{3}{7}$

4) l2: p = 0,3

l4: (n)

l5: p = 0,3 + 0,7 * p** 2

Exercice 4



b) D'après la propriété des probabilités totales

$p(R) = p(R \cap V) + p(R \cap \bar{V})$

$= p_V(R) \times p(V) + p_{\bar{V}}(R) \times p(\bar{V})$

$= \frac{1}{50} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{150}$.

c) $p_R(V) = \frac{p(R \cap V)}{p(R)} = \frac{p_V(R) \times p(V)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{50} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{150}} = \frac{2}{7}$.

2) a) L'expérience est un schéma de Bernoulli de succès "Paul prend son vélo" de probabilité $p = \frac{2}{3}$.

On répète 20 fois cette expérience de façon identique et indépendante.

X compte le nombre de succès

$X \sim \mathcal{B}\left(20, \frac{2}{3}\right)$

b) $p(X = 10) = \binom{20}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10} = 0,054$

c) $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10)$
$= 1 - P(X \leq 9) = 0,962$.

d) $E(X) = np = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} = 13,3$
En moyenne, sur 20 jours Paul prend son vélo 13 jours.

3) $E(T) = 10 \times 0,14 + 11 \times 0,13 + 12 \times 0,13 + 13 \times 0,12 + 14 \times 0,12 + 15 \times 0,11 + 16 \times 0,10 + 17 \times 0,08 + 18 \times 0,07 = 13,3$

En moyenne, Paul met 13,3 minute à aller à la gare quand il prend sa voiture.