# Sujet 2 - BB2

## Exercice 1.

Partie A : $f(t) = 3t e^{-0,5t+1}$ $\quad t \in [0, 10]$.

1a) $f = uv$ avec $u(t) = 3t$ $\quad u'(t) = 3$

$v(t) = e^{-0,5t+1}$ $\quad v'(t) = -0,5 e^{-0,5t+1}$

$f' = u'v + uv'$

$f'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t\left(-0,5\, e^{-0,5t+1}\right)$

$= 3e^{-0,5t+1}(1 - 0,5t)$

b) $\forall t \in [0, 10]$ $3e^{-0,5t+1} > 0$

$f'(t)$ a le signe de $1 - 0,5t$.

$1 - 0,5t > 0$

$\Leftrightarrow -0,5t > -1$

$\Leftrightarrow t < 2$

| $t$ | $0$ | | $2$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $6$ | $\searrow$ | $30e^{-4}$ |

$f$ est croissante sur $[0, 2]$ et décroissante sur $[2, 10]$.

c) $f$ admet un maximum pour $t = 2$, la quantité maximale est de 6 mg.

2a) $f$ est continue et croissante sur $[0, 2]$ à valeurs sur $[0, 6]$

$5 \in [0, 6]$, d'après le théorème de la bijection l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution $\alpha = 1,02$

b) $f(t) > 5 \Leftrightarrow 1,02 < t < 3,46$ $\quad \Delta t = 2,44$

$\Leftrightarrow$ le médicament est efficace pendant 2h et 26 minutes.

Partie B.

1) $1 - \frac{30}{100} = 0{,}7$

$0{,}7 \times 2 + 1{,}8 = 3{,}2 \Rightarrow u_1 = 3{,}2$

2) Diminuer de 30% revient à multiplier par 0,3.

donc $0{,}7u_n$ est la quantité de médicament diminuée de 30%

$\boxed{u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8.}$

3a) Initialisation $u_0 = 2$ $u_1 = 3{,}2$

$u_0 \leq u_1 \leq 6$ la pté est vraie

Hérédité

HR On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tq $u_k \leq u_{k+1} \leq 6$

Alors $0{,}7u_k \leq 0{,}7u_{k+1} \leq 4{,}2$

$\Leftrightarrow 0{,}7u_k + 1{,}8 \leq 0{,}7u_{k+1} + 1{,}8 \leq 6$

$\Leftrightarrow u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 6.$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq u_{n+1} \leq 6$

b) $u_n$ est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

c) $f(x) = 0{,}7x + 1{,}8$ est une f° affine, elle est continue

$[0,6]$ est stable par $f$.

$u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n$ est convergente, elle tend vers $l$

d'après le th. du point fixe, $l$ est solution de $f(x) = x$

$\Leftrightarrow 0{,}7x + 1{,}8 = x$

$\Leftrightarrow 0{,}3x = 1{,}8$

$\Leftrightarrow x = 6.$ la limite $l = 6.$

Avec bcp d'inject, la quantité de médicament ds le sang est de 6mg.

4) $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = 6 - u_n$

$v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - 0{,}7u_n - 1{,}8$

$= 4{,}2 - 0{,}7u_n$

$= 0{,}7(6 - u_n) = 0{,}7v_n$

$v_n$ est une suite géométrique de raison 0,7 et $v_0 = 6 - u_0 = 4.$

b) $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0{,}7^n$

$u_n = 6 - v_n = 6 - 4 \times 0{,}7^n.$

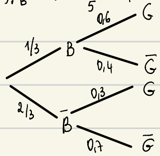
c) $u_n \geq 5,5$

Grace à la table de la calculatrice, on trouve $n \geq 6$.

## Exercice 2

1) a) $p_B(G) = \frac{3}{5} = 0,6$

b)




2 a) D'après la pté de probabilités totale

$$p(G) = p(G\cap B) + p(G\cap \bar{B})$$

$$= p_B(G)\times p(B) + p_{\bar{B}}(G)\times p(\bar{B})$$

$$= \frac{1}{3}\times 0,6 + \frac{2}{3}\times 0,3 = 0,4$$

b) $p_G(B) = \frac{p(G\cap B)}{p(G)} = \frac{p_B(G)\times p(B)}{p(G)} = \frac{\frac{1}{3}\times 0,6}{0,4} = \frac{1}{2}$

3) $p(B\cap G) = 0,2$ et $p(B)\times p(G) = \frac{1}{3}\times 0,4 = \frac{2}{15} \neq 0,2$ les evenements B et G ne sont pas independants

4) L'expérience est un schéma de Bernoulli, de succès "le joueur gagne la partie" dont la probabilités est $p = 0,4$

On repete 10 fois l'experience de façon identique et independante

X compte le nombre de parties gagnées

$X \sim \mathcal{B}(10;0.4)$

b) $P(X=3) = \binom{10}{3}\, 0,4^3\, 0,6^7 = 0,215$

c) $P(X \geq 4) = 1 - P(X<4) = 1 - P(X\leq 3) = 0,618$

la probabilité de gagner au moins 4 parties est de 0,618

5 a) $p_n = P(X\geq 1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - 0,6^n$

b) $p_n \geq 0,99 \Rightarrow n \geq 10$

A parti de 10 parties, la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à 0,99.

## Exercice 3

1) $E(0,0,1)$ K milieu de [BC]

$F(1,0,1)$ $K\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$

$G(1,1,1)$

2) $\vec{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{EK}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\vec{EG} = 2\times 1 + (-2)\times 1 + 1\times 0 = 0$ $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de (EGK)

$\vec{n}\cdot\vec{EK} = 2\times 1 + \left(-2\times\frac{1}{2}\right) + 1\times(-1) = 0$ donc $\vec{n}$ est normal à (EGK)

3) $\vec{n} \perp (EGK)$

$(EGK) : 2x - 2y + z + d = 0$

$E \in (EGK) \quad 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

$\boxed{(EGK) : 2x - 2y + z - 1 = 0}$

4) $(d) \perp (EGK)$ $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $d$

$M(x, y, z) \in d \Leftrightarrow \vec{FM} = t\vec{n} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

5) $L$ projeté orthogonal de $F$ sur $(EGK)$ donc $L \in (EGK) : 2x - 2y + z - 1 = 0$

et $L \in d$ $\Leftrightarrow 2(2t + 1) - 2(-2t) + (t + 1) - 1 = 0$

$9t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{9}$

$x = 2 \times \left(-\frac{2}{9}\right) + 1 = -\frac{4}{9} + 1 = \frac{5}{9}$

$y = -2 \times \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$ et $z = -\frac{2}{9} + 1 = \frac{7}{9}$

$L\left(\frac{5}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{7}{9}\right)$

6) $\vec{LF} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

$LF = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

7) $(EFG) = \frac{EF \times FG}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

$V = \frac{1}{3} (EFG) \times FB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$

8) $V = \frac{1}{3} (EGK) \times LF = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{3} (EGK) \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (EGK) = \frac{1 \times 9}{6 \times 2} = \frac{3}{4}$.

9)

D'après le théorème de Thalès, les coté de IMN sont la moitié des coté de EGK donc l'aire de IMN $= \frac{1}{4}$ Aire EGK

$A(IMN) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

$V = \frac{1}{3} A(IMN) \times LF = \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{24}$

Exercice 4 justification non demandée.

1) réponse c)

$f(x) = \frac{u}{v}$ $\quad u(x) = x \quad u'(x) = 1$

$v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$

$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x} = (1-x)e^{-x}$.

2. Réponse d.

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f'$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |
| $f$ | | convexe | \| | concave | |

toutes les réponses autre que la d sont fausses.

3. réponse b

la limite donne une forme indéterminée

$\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{\cancel{e^x}(1+\frac{1}{e^x})}{\cancel{e^x}(1-\frac{1}{e^x})} = \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{e^x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{e^x} = 1$

par quotient la limite vaut 1.

4) réponse b

Ici la suite est définie $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $w_0$ existe

On a $\quad w_2 = 2w_1 - 4 \iff 8 = 2w_1 - 4$

$\iff 6 = w_1$

$w_1 = 2w_0 - 4 \iff 6 = 2w_0 - 4$

$w_0 = 5$

5) réponse a

b → retourne 0 car ; on teste tant que $v > 200$ or $v_0 = 57 < 200$, on ne passe pas dans la boucle

= aucun calcul fait

c → calcule $V_{200}$. Ce n'est pas ce qui est demandé

d → Étrange programme, aucun lien avec le pb.