BB1 - Correction

Terminales Spécialité Maths

Exercice 1- sujet A **4 points**

Ecrire juste la lettre "réponse" sur votre copie, pour simplifier la lecture, je rajoute le texte "réponse" dans le corrigé.

1. La suite (q^n) n'admet pas de limite si :

   Réponse D : $q \leq -1$.

2. La proposition exacte est :

   Réponse D : Toute suite croissante est minorée.

3. La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -5 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$:

   Réponse C : tend vers $-\infty$.

4. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 + 2 \times (-0.7)^n$:

   Réponse B : tend vers 1.

Exercice 1- sujet B **4 points**

Ecrire juste la lettre "réponse" sur votre copie, pour simplifier la lecture, je rajoute le texte "réponse" dans le corrigé.

1. La propostion exacte est :

   Réponse B : Toute suite décroissante est majorée.

2. La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -2 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$:

   Réponse B : tend vers $-\infty$.

3. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 + 2 \times (-0.3)^n$:

   Réponse A : tend vers 3.

4. La suite (q^n) n'admet pas de limite si :

   Réponse D : $q \leq -1$.

Exercice 2 **6 points**

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. • On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -\mathrm{e}^{-2x} = -\infty$; donc par somme de limites :
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
   • On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$; donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
2. la fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
   $f'(x) = 1 - (-2)\mathrm{e}^{-2x} = 1 + 2\mathrm{e}^{-2x}$.
   On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, donc $1 + 2\mathrm{e}^{-2x} > 1 > 0$. La dérivée est positive donc la fonction f est strictement croissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction f est continue car dérivable et strictement croissante ; comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection, il existe un réel unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$.
   La calculatrice donne :
   $f(0) = -1$ et $f(1) \approx 0{,}865$, donc $0 < \alpha < 1$;
   $f(0{,}4) \approx -0{,}05$ et $f(0{,}5) \approx 0{,}13$, donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$;
   $f(0{,}42) \approx -0{,}01$ et $f(0{,}43) \approx 0{,}007$, donc $0{,}42 < \alpha < 0{,}43$.
4. On a donc :
   • sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$, $f(x) < 0$;
   • sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $f(x) > 0$;
   • et $f(\alpha) = 0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Partie II

1.
$$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

   (a) Soit $u(t) = t^2 + \mathrm{e}^{-2t}$, donc $h(t) = \sqrt{u(t)}$ est la fonction composée de deux fonctions u qui est dérivable (somme de fonctions carrées et exponentielle) est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction $\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Donc $h'(t) = \dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \dfrac{2t - 2\mathrm{e}^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}} = \dfrac{t - \mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}} = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}$.

   (b) Le dénominateur étant positif, le signe de $h'(t)$ est le signe du numérateur soit $f(t)$ dont on a vu le signe dans la partie I.
   Donc :
   • sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$, $f(t) < 0$ donc $h'(t) < 0$: la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle ;
   • sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $f(x) > 0$ donc $h'(t) > 0$: la fonction est strictement croissante sur cet intervalle ;
   • et $f(\alpha) = 0$, donc $h(\alpha)$ est le minimum de la fonction h.

t	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
h	$\searrow$		$h(\alpha)$		$\nearrow$

La distance OM est donc minimale pour $t = \alpha$ et l'ordonnée de M est alors $\mathrm{e}^{-\alpha}$.
Le point de la courbe le plus proche de l'origine est donc le point A$(\alpha\ ;\ \mathrm{e}^{-\alpha})$.
α est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Il suffit de tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point, elle coupe $\mathcal{C}$ au point A (cf. graphique)

2. (a) Le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse α est $g'(\alpha) = -\mathrm{e}^{-\alpha}$

   (b) D'après le rappel le produit des coefficients directeurs est $-\mathrm{e}^{\,-\alpha} \times \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha} = -\dfrac{\mathrm{e}^{\,-2\alpha}}{\alpha}$.
   or on sait que $f(\alpha) = 0 \iff \alpha - \mathrm{e}^{-2\alpha} = 0 \iff \mathrm{e}^{-2\alpha} = \alpha$, donc finalement le produit des coefficients directeurs est égal à $-\dfrac{\mathrm{e}^{\,-2\alpha}}{\alpha} = -\dfrac{\alpha}{\alpha} = -1$. La droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 3