1. (a) $u_1 = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$

$$u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

   (b) L3 : u=1
   L6 : u=u/(1+u)

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} - u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} - \dfrac{u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \dfrac{-u_n^2}{1+u_n}$
   Sachant que $u_n > 0$, on en déduit que $1 + u_n > 0$. De plus, $-u_n^2 < 0$, par signe de quotient, $u_{n+1} - u_n < 0$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,$u_n > 0$ et u_n est décroissante. Toute suite décroissante et minorée est convergente. Donc u_n converge.

4. (Remarque : cette question aurait été décomposée en évaluation.)

   Soit f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

   On remarque que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   La limite de u_n est la solution de $f(x) = x$ (pour le moment, on admet ce résultat, je modifierai le corrigé dès que nous aurons vu le théorème du point fixe...patience.) $f(x) = x \Leftrightarrow x = x(1+x) \Leftrightarrow$

   $x = x + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   La limite de u_n est 0.

5. (a) On peut conjecturer que $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

   (b) **Initialisation :** $u_0 = 1$ et $\dfrac{1}{1+0} = 1$.
   La propriété est vraie pour $n = 0$.
   HR : On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $u_k = \dfrac{1}{k+1}$.
   Hérédité : On montre que $u_{k+1} = \dfrac{1}{k+2}$

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k} = \frac{\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k+1}} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{k+2}{k+1}} = \frac{1}{k+2}$$

   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}; u_n = \dfrac{1}{n+1}$