$u_0 = 3; u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$

1. (a) $u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 15 - 3 = 12$
   (b) $u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 7 = 53$
   (c) u_n semble être croissante.
2. (a) **Initialisation :** $u_0 = 3$ et $n + 1 = 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   HR : On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $u_k \geq k + 1$
   Hérédité : $u_{k+1} = 5u_k - 4k - 3 \geq 5(k+1) - 4k - 3$
   $u_{k+1} \geq 5k + 5 - 4k - 3$
   $u_{k+1} \geq k + 2$
   On a montré l'hérédité.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq n + 1$
   (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
3. (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 1$
   $v_{n+1} = 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1 = 5u_n - 5n - 5 = 5(u_n - n - 1) = 5v_n$
   Donc v_n est géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$.
   (b) $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 5^n$
   (c) $u_n = v_n + n + 1 = 2 \times 5^n + n + 1$
   (d) $u_{n+1} - u_n = 2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1 - (2 \times 5^n + n + 1) = 2 \times 5^{n+1} + n + 2 - 2 \times 5^n - n - 1 = 2 \times 5^{n+1} - 2 \times 5^n + 1 = 2 \times 5^n(5-1) + 1 = 2 \times 5^n \times 4 + 1 > 0$ donc u_n est croissante.
4.
```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while u<10**7 :
        u =5*u-4*n-3
        n = n + 1
    return n
```
   On trouve $n = 10$.