BAC BLANC- Sujet 1

Spécialité Mathématiques

Lundi 16 janvier 2023

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

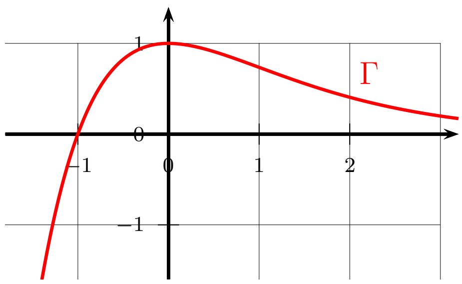
1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^{1\,000} + x$.

   On peut affirmer que :

   a. la fonction g est concave sur $\mathbb{R}$.
   b. la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.
   c. la fonction g possède exactement un point d'inflexion.
   d. la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

2. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   On note f' sa fonction dérivée.
   On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.
   On note Γ la courbe représentative de f'.
   On a tracé ci-contre la courbe Γ.

   On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 .

   On peut affirmer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation :

   a. $y = x$
   b. $y = 0$
   c. $y = 1$
   d. $x = 0$

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

   On peut affirmer que la suite (u_n) est :

   a. majorée et non minorée.
   b. minorée et non majorée.
   c. bornée.
   d. non majorée et non minorée.

4. On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par :

   $$a_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 1} a_n \quad \text{et} \quad a_0 = 1.$$

   On peut affirmer que :

a. la suite (a_n) est strictement croissante.

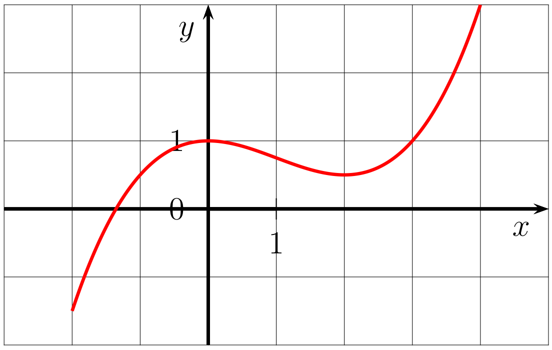
b. la suite (a_n) est strictement décroissante.

c. la suite (a_n) n'est pas monotone.

d. la suite (a_n) est constante.

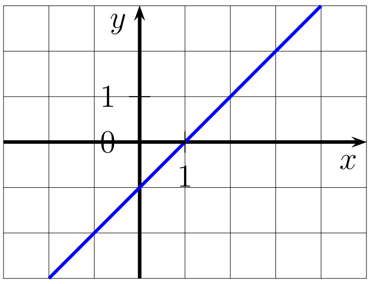
5.

Dans un repère, on a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-2\ ;\ 4]$

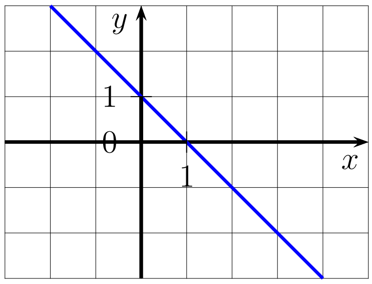


Parmi les courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'', dérivée seconde de f ?

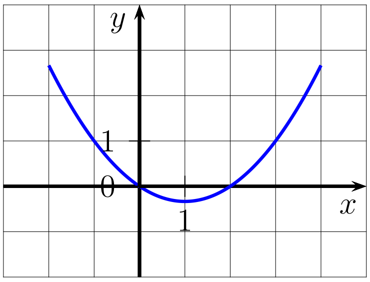
a.



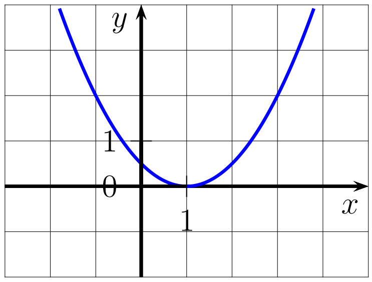
b.



c.



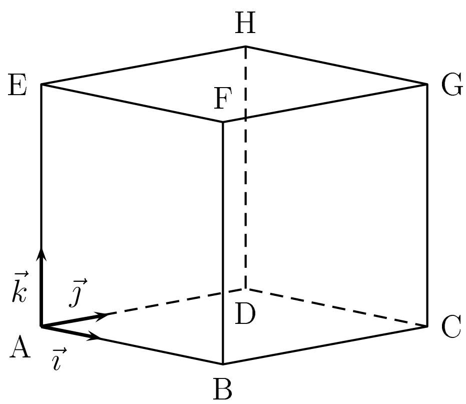
d.



EXERCICE 2 5 points

Le solide ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont :

$$\text{B}(3\ ;\ 0\ ;\ 0), \text{D}(0\ ;\ 3\ ;\ 0) \text{ et } \text{E}(0\ ;\ 0\ ;\ 3).$$



On considère les points P(0 ; 0 ; 1), Q(0 ; 2 ; 3) et R(1 ; 0 ; 3).

1. Placer les points P, Q et R sur la figure en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
2. Montrer que le triangle PQR est isocèle en R.
3. Justifier que les points P, Q et R définissent un plan.
4. On s'intéresse à présent à la distance entre le point E et le plan (PQR).
   (a) Montrer que le vecteur $\vec{u}(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$ est normal au plan (PQR).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (PQR).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point E et orthogonale au plan (PQR).
   (d) Montrer que le point $\mathrm{L}\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).
   (e) Déterminer la distance entre le point E et le plan (PQR).
5. En choisissant le triangle EQR comme base, montrer que le volume du tétraèdre EPQR est $\frac{2}{3}$.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante.}$$
6. Trouver, à l'aide des deux questions précédentes, l'aire du triangle PQR.

EXERCICE 3 5 points

On s'intéresse au développement d'une bactérie.
Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)
   (a) Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.
   (b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?
   (c) Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).
2. (a) Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.
   (b) Justifier que la suite (p_n) est convergente.
3. On appelle L la limite de la suite (p_n).
   (a) Justifier que L est solution de l'équation
   $$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$
   (b) Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

```
1 def suite(n) :
2   p= ...
3   s=[p]
4   for i in range (...) :
5       p=...
6       s.append(p)
7   return (s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

EXERCICE 4 — 5 points

Chaque chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, si il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1. lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.

   On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.

   On note :

   - V l'évènement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
   - R l'évènement « Paul rate son train ».

   (a) Faire un arbre pondéré résumant la situation.

   (b) Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\dfrac{7}{150}$.

   (c) Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

2. On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule.

   On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.

   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

   (a) Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

   (b) Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

   (c) Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

   (d) En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo ? On arrondira la réponse à l'entier.

3. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

   Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

ANNEXE à rendre avec la copie