BAC BLANC- Sujet 2

Spécialité Mathématiques

Mardi 17 janvier 2023

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 5 points

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.
L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0.5t+1}$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;\,10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
   (c) Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
   Quelle est alors cette quantité maximale ?
2. (a) Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
   On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2\,;\,10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.
   (b) On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
   Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de $1,8$ mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,7$ dont on précisera le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   (c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$ mg.
   Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

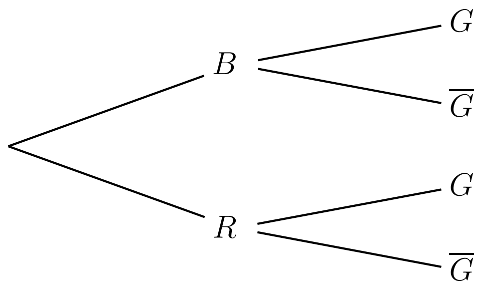
EXERCICE 2 — 5 points

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».
   (a) Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.
   (b) On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à $0,3$.
   Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. (a) Montrer que $P(G) = 0,4$.
   (b) Un joueur gagne la partie.
   Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?
3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

(a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

(b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.

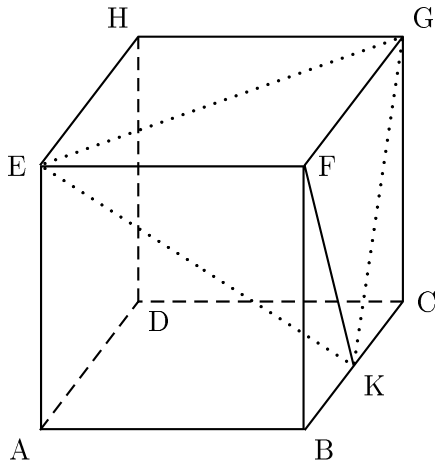
(c) Calculer $P(X \geqslant 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
Donner une interprétation du résultat obtenu.

5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ».

(a) Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.

(b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à $0,99$.

EXERCICE 3 5 points



On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].

On se place dans le repère $\left(\text{A} ; \vec{\text{AB}}, \vec{\text{AD}}, \vec{\text{AE}}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.
5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{7}{9}\right)$.
6. Justifier que la longueur LF est égale à $\dfrac{2}{3}$.
7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\dfrac{1}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

EXERCICE 4 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

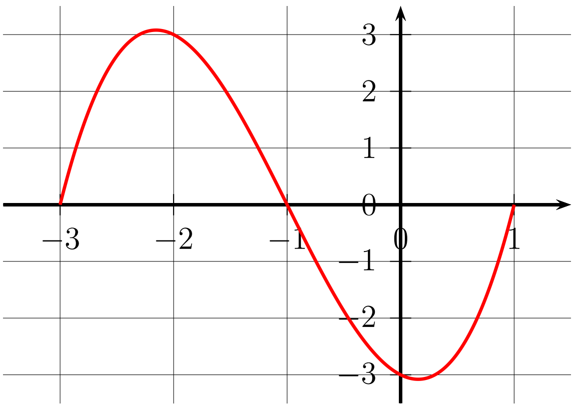
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$
b. $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
c. $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$
d. $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$

2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3~;~1]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde f''.



On peut alors affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-1~;~1]$
b. La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2~;~0]$
c. La fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-2~;~0]$
d. La fonction f' admet un maximum en $x = -1$

3. Que vaut :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$$

a. -1
b. 1
c. $+\infty$
d. n'existe pas

4. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$w_{n+1} = 2w_n - 4 \quad \text{et} \quad w_2 = 8.$$

On peut affirmer que :

a. $w_0 = 0$
b. $w_0 = 5$.
c. $w_0 = 10$.
d. Il n'est pas possible de calculer w_0.

5. Une action est cotée à 57 €. Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.

   La fonction python seuil() qui renvoie le nombre de mois à attendre pour que sa valeur dépasse 200 € est :

a.

```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v < 200 :
        m=m+1
        v = v*1.03
    return m
```

b.

```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v > 200 :
        m=m+1
        v = v*1.03
    return m
```

c.

```
def seuil() :
    v=57
    for i in range (200) :
        v = v*1.03
    return v
```

d.

```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    if v < 200 :
        m=m+1
    else :
        v = v*1.03
    return m
```